Università degli Studi di Milano-Bicocca

Centro Interuniversitario MaCSIS

**MaCSIS Working Paper Series**

# Le dinamiche dell'invenzione matematica e le loro applicazioni alla comunicazione

Emanuele Bottazzi

**Working Paper n.2/2018**

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO BICOCCA**

**Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale**

**Master di Comunicazione della Scienza e dell'Innovazione Sostenibile**

# Le dinamiche dell'invenzione matematica e le loro applicazioni alla comunicazione

**Relatore**
**Prof. Andrea Cerroni**

**Tesi di master di**
**Emanuele Bottazzi**
**Matricola 835728**

**Anno Accademico** 2017/2018

# Indice

# Introduzione

Violets in the Helix were dedicated to complex structures, chess, the love of the more complex aspects of human relationships, and astronomy.

*Dan Simmons, Orphans of the Helix*

Da quando è vero il Teorema di Pitagora? Dal momento in cui è stato formulato per la prima volta, probabilmente da un matematico babilonese vissuto mille anni prima di Pitagora? Oppure è una verità eterna, valida fin dal primo istante dopo il Big Bang e che continuerà a valere fino all'ultimo istante di vita del nostro universo? Che dire invece delle strutture matematiche descritte negli ultimi articoli apparsi sul prestigioso Journal of the American Mathematical Society, come i *Vertex Reinforced Jump Processes* o gli *Edge Reinforced Random Walks* sui grafi? Sono nati pochi anni fa nella mente di qualche matematico contemporaneo, oppure anche loro già esistevano dall'inizio dei tempi, in attesa di essere scoperti?

Andando al fondo di queste domande, è necessario confrontarsi con la domanda: *cos'è la matematica*?

Alcune tra le risposte più comuni sono: è una lingua o un linguaggio, come riteneva anche Galileo, è la scienza dei numeri, è lo studio delle forme e delle strutture ideate dalla mente umana, è la disciplina del ragionamento per eccellenza e del problem solving. Quest'ultima definizione si può trovare in alcuni siti che si occupano di didattica, ma non è un'invenzione moderna: infatti si ritrova anche nelle idee di filosofi e scienziati del calibro di Newton.

Ciascuna di queste definizioni, se sottoposta a un esame attento, si rivela parziale. Per esempio: è vero che la matematica, in linea di principio, può essere espressa unicamente mediante un linguaggio tecnico, come accade anche per la musica; ma così come non è possibile ridurre la musica ai segni su uno spartito, anche la matematica non può essere identificata al linguaggio con la quale è espressa. Per approfondire la relazione tra la pratica matematica e le sue rappresentazioni suggeriamo alcune ricerche del professor Keith Devlin. Inoltre la matematica non si occupa solo di numeri, forme e strutture ideate dalla mente umana, ma può essere usata anche per descrivere e studiare fenomeni naturali che spaziano dalla configurazione dei pistilli dei girasoli ai movimenti dei corpi celesti, ma anche fenomeni senza una struttura apparente, come la diffusione delle epidemie o il comportamento dei consumatori. Infine, se da un lato esistono molte forme di ragionamento matematico, alcune delle quali incompatibili tra loro, dall'altro esistono forme diverse di pensiero razionale e di tecniche di problem solving. Queste spesso sono molto diverse da quelle usate in matematica, ma nella nostra vita ricoprono un ruolo almeno altrettanto importante del ragionamento logico-deduttivo tipico della matematica. Per esempio, alcuni autori suggeriscono che il modo di ragionare degli esseri umani non sia nato per preservare la verità, come le catene deduttive in logica classica, ma per conservare il grado di confidenza in alcune premesse, spesso stimate in modo euristico o non completamente consapevole. Una terza possibilità è che la razionalità umana non sia finalizzata all'acquisto di nuova conoscenza e al decision-making, ma alla relazione dialettica tra individui.

A prescindere dai tentativi di definizione che si possono fare della matematica, numerosi scienziati ritengono che questa abbia delle caratteristiche ben precise: è universale, nel senso della concezione platonista secondo la quale gli oggetti matematici e le loro proprietà hanno un'esistenza autonoma, che non dipende dagli individui che la praticano né dalle loro culture, ed è la disciplina che meglio di tutte le altre incarna la razionalità umana e la conoscenza certa. A partire dalla seconda metà del XX secolo è però emersa una concezione alternativa della matematica, secondo la quale questa disciplina non avrebbe i caratteri assoluti e oggettivi che le vengono tradizionalmente attribuiti, ma ha la connotazione di un'*attività sociale*, le cui verità non sono assolute e immutabili, ma sono profondamente radicate nella società delle persone che la praticano. Lo stesso varrebbe per gli oggetti matematici che, con le parole del matematico Reuben Hersh,

*exist, are real, as shared concepts, part of the shared thinking of mathematicians.*

Entrambe queste concezioni della matematica devono confrontarsi con la pratica quotidiana dei ricercatori, che però non è stata indagata in modo sistematico. È solo a partire dall'inizio del XX secolo che alcuni scienziati, soprattutto matematici di professione, hanno iniziato a mostrare curiosità nei confronti dei meccanismi che portano alla dimostrazione di un teorema, alla formulazione di una congettura o in generale alla risoluzione di un problema matematico. Dalle loro indagini è emersa caratterizzazione dell'attività di ricerca in quattro passi: un momento preliminare di approccio a un problema è tipicamente seguito da un periodo di incubazione che culmina in un'illuminazione improvvisa, al seguito della quale è necessario un nuovo lavoro consapevole di sistematizzazione.

L'interazione tra la concezione della matematica e le dinamiche di quella che Hadamard chiama l'*invenzione matematica* hanno delle ricadute sulle strategie di comunicazione della matematica: per esempio, nell'affrontare un nuovo problema i sostenitori del primato del pensiero logico-deduttivo gli attribuiranno un'importanza maggiore rispetto a chi ritiene che altre forme di ragionamento possano costituire degli strumenti di indagine ugualmente efficaci. I legami tra la creatività matematica e la sua comunicazione, specialmente fuori dall'ambito didattico, non sono ancora studiati in modo sistematico, ma dall'analisi di alcuni singoli casi è comunque possibile riconoscere delle linee guida che possono essere utili a insegnanti e divulgatori.

# Capitolo 1

# La concezione classica della matematica

Secondo una concezione diffusa della matematica, il teorema di Pitagora è vero da sempre e continuerà a essere vero fino alla fine dell'universo. La verità di ogni teorema matematico è inoltre incontestabile e universale: infatti una dimostrazione corretta per i greci di tremila anni fa continua a essere vera ancora oggi ed è condivisibile da persone di ogni cultura. Inoltre, il metodo logico-deduttivo della è l'unico metodo per ottenere conoscenza certa: di conseguenza, la matematica è la disciplina che meglio rappresenta la razionalità umana.

## 1.1 La matematica è universale

La matematica è sorta in modo indipendente in numerose civiltà del mondo antico, tra cui quella sumera, egizia, babilonese, cinese, indiana e araba. Alcuni sostengono che anche oggi un teorema esposto con cura possa essere comprensibile[1] in ogni parte del globo, da persone di ogni società e di ogni lingua (Waller e Flood 2016).

C'è anche di più: i ragionamenti matematici, una volta sistematizzati con sufficiente rigore, non sono solo universalmente comprensibili, ma non lasciano neppure spazio per le opinioni personali o il dibattito. Per esempio, la primalità o meno di un numero come 75361 non può essere decisa arbitrariamente, ma è una proprietà che si può stabilire una volta per tutte in modo incontestabile studiando la sua fattorizzazione. Questa non dipende dal metodo di divisione utilizzato dalle persone che eseguono i calcoli, né tanto meno da altre caratteristiche cognitive, culturali o sociali dei ricercatori.

In altre parole: la matematica sembra essere l'unica area del pensiero umano assoluta, che non dipende da alcuna caratteristica delle persone che la indagano. Questa idea si può declinare in due modi: in primo luogo, gli oggetti matematici hanno un'esistenza indipendente dalle persone che li studiano; di conseguenza, il lavoro dei matematici è paragonabile a quello degli esploratori che con i loro viaggi scoprono nuove terre. In secondo luogo c'è la fiducia che ogni problema matematico ammetta sempre un'unica soluzione corretta, che si può scoprire utilizzando il

[1] Tenendo certamente conto della barriera d'ingresso dovuta alla complessità della materia.

metodo logico-deduttivo tipico della disciplina.

### 1.1.1 Il platonismo matematico

In prima approssimazione, gli oggetti dello studio della biologia sono gli esseri viventi, la fisica si occupa delle proprietà della materia dell'universo, la psicologia comportamentale indaga le persone e le loro azioni. Questi esempi suggeriscono che, nella maggior parte delle discipline scientifiche, gli oggetti studiati sono indipendenti dall'esistenza di un ricercatore che li indaga o dei processi mentali che utilizza nei suoi ragionamenti.

Secondo la concezione platonista della matematica, lo stesso vale anche per questa disciplina: gli oggetti matematici come i numeri o le forme geometriche, pur essendo astratti, esistono indipendentemente non solo dalle persone che li studiano, ma anche dal loro linguaggio, dalla loro cultura, e dalle tecniche di indagine che scelgono. Una interessante raccolta di citazioni di matematici platonisti dal XVIII secolo fino a oggi è stata raccolta dal matematico Reuben Hersh nel primo capitolo del suo libro *What is mathematics, really?* (Hersh 1997b).

Secondo i platonisti, quindi, i numeri naturali sono oggetti matematici che esistono da sempre e continueranno a esistere anche dopo che il genere umano si sarà estinto[2]. Questa posizione diventa ancora più plausibile esaminando la forma di alcuni teoremi elementari sui numeri naturali. Uno di questi, la cui dimostrazione compare nel libro IX degli *Elementi* di Euclide, afferma che esistono infiniti numeri primi[3]. Questa proprietà non sembra dipendere in alcun modo da una qualsiasi influenza esterna, ma sembra connaturata alla struttura stessa dei numeri. Inoltre, una volta che l'affermazione è stata dimostrata, non è più possibile credere che esista solo una quantità limitata di numeri primi.

Anche la geometria euclidea, che pure è nata a partire dall'astrazione delle proprietà intuitive dello spazio sensibile, ha fornito argomenti a sostegno del platonismo. Continuiamo a prendere come esempio gli *Elementi*: nei postulati e nei teoremi che compaiono nell'opera di Euclide si richiede o si afferma la possibilità di eseguire certe costruzioni con riga e compasso. Per esempio, si assume che sia possibile tracciare segmenti di linee rette e disegnare circonferenze di raggio assegnato; poi, a partire da queste assunzioni, si dimostra che è possibile costruire esagoni regolari. Questo modo di procedere è una idealizzazione rispetto all'esperienza sensibile della vita quotidiana, nella quale non esistono rette o circonferenze perfette, e dove i disegni ottenuti da due persone diverse che seguono le medesime istruzioni sono invariabilmente diversi. Eppure, nell'idealizzazione matematica gli enti geometrici non presentano le imperfezioni e le arbitrarietà connaturate alle loro rappresentazioni, e le loro proprietà sono indipendenti dai metodi utilizzati per studiarli.

Il platonismo non è caratteristico solo della matematica antica, ma è stato so-

[2]Al lettore attento non sarà sfuggita l'analogia che esiste tra il platonismo matematico e alcuni aspetti della filosofia di Platone, in particolare la teoria delle idee presentata nel *Fedone*. Platone, a sua volta, probabilmente ha derivato la sua concezione della matematica da Pitagora.

[3]L'enunciato originale di Euclide in realtà afferma che la quantità dei numeri primi è maggiore di qualsiasi quantità assegnata. Secondo un'approssimazione comune, ma che non è accettata da tutti i matematici, questo enunciato è stato considerato equivalente all'esistenza di infiniti numeri primi.

stenuto in ogni epoca storica da numerosi scienziati e filosofi, tra cui anche Newton, Kant, Frege, Russel, Gödel, Popper, Penrose, Erdős e Shapiro.

La concezione che Newton ha dello spazio è esposta nei *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Newton 1833). In quest'opera, il fisico britannico propone l'idea di spazio matematico assoluto come sistema di riferimento fisso e immutabile rispetto al quale definire la nozione di moto di un corpo: un corpo è in moto se cambia posizione rispetto a questo sistema di riferimento. Per Newton è importante che lo spazio sia omogeneo e non sia influenzato dalla materia che lo occupa: queste ipotesi combinate alle sue *leggi della dinamica* consentono di passare dalla definizione di moto allo studio delle forze che agiscono sui corpi. La teoria della fisica che deriva da questo modello, non a caso chiamata *meccanica newtoniana* o *classica*, è una pietra miliare della storia della scienza e rimane ancora oggi il modello più efficiente per rappresentare i fenomeni che avvengono su distanze medie e a basse velocità[4].

Poco più di cinquant'anni più tardi, Kant ha ripreso l'idea dello spazio assoluto tra i concetti a priori che caratterizzano la capacità umana di conoscere. Questa posizione e la sua rilevanza per la concezione classica della matematica sono discusse nei dettagli da Hersh 1997b.

La convinzione che esista uno spazio assoluto, sia in geometria sia nella fisica, è stata rivoluzionata nel XIX e nel XX secolo, quando in matematica è iniziato lo studio sistematico delle *geometrie non euclidee* che poi hanno trovato applicazioni nelle moderne teorie fisiche, come la *teoria della relatività generale*. Queste rivoluzioni concettuali che hanno cambiato profondamente la concezione dello spazio non costituiscono però delle valide obiezioni al platonismo: infatti l'esistenza di ulteriori nozioni di spazio non esclude che queste esistessero anche prima di essere state scoperte e che non dipendano dalle scelte metodologiche degli studiosi che le indagano.

Anche Kurt Gödel, uno tra i più grandi logici della storia dell'umanità, era un convinto platonista. Una delle sue più famose affermazioni su questa posizione filosofica, che si può trovare per esempio in Gödel 1989, riguarda la teoria degli insiemi, una delle aree più astratte della matematica e oggi spesso utilizzata come suo fondamento:

*classes and concepts may, however, also be conceived as real objects, namely classes as [...] structures consisting of a plurality of things and concepts as the properties and relations of things existing independently of our definitions and constructions.*

Una conseguenza rilevante della posizione platonista è che, pur esistendo una vastità di oggetti matematici, moltissimi dei quali ancora da scoprire, esiste un'unica matematica. In altre parole, così come in geometria euclidea esiste un solo concetto di punto, così in matematica esiste un solo concetto di numero naturale, e lo stesso vale per i numeri reali, per gli insiemi, per le funzioni, e per ogni altro oggetto matematico.

[4]Per i fenomeni su scala atomica il modello newtoniano è sperimentalmente meno accurato di quello quantistico, mentre per quelli su scala cosmica o a velocità prossime a quella della luce è meno accurato di quello relativistico. In linea di principio, anche i fenomeni che non presentano queste caratteristiche possono comunque essere rappresentati per mezzo della fisica quantistica e/o relativistica, ma l'eventuale incremento in accuratezza rispetto alla meccanica newtoniana non è

Inoltre, siccome le proprietà degli enti matematici non sono influenzate dall'azione umana, la matematica costituisce una sorta di *linguaggio universale* che può essere utilizzato per comunicare sia tra uomini ogni cultura, sia con altre specie non umane. Quest'idea è talmente radicata nell'immaginario collettivo da aver portato a includere in diversi messaggi inviati nello spazio, oltre a dati chimici e biologici sull'essere umano, alcune informazioni elementari sui numeri naturali. La motivazione addotta è che un'eventuale intelligenza aliena in grado di leggere il messaggio capirebbe che i mittenti hanno un'idea ben sviluppata dei numeri e, di conseguenza, della matematica (Narens 1973).

Di fronte a questa disciplina universale, il ruolo dei matematici è analogo a quello degli esploratori: così come i secondi scoprono un mondo che esiste al di fuori di loro, così i primi studiano le proprietà di oggetti matematici che esistono in modo indipendente da essi. I platonisti sostengono questa posizione non solo per l'aritmetica e per la geometria, ma per tutti gli ambiti della matematica: così quando i ricercatori introducono nuovi elementi nelle loro teorie, come per esempio i numeri complessi per risolvere le equazioni di terzo grado o il piano cartesiano per rappresentare in modo analitico le figure geometriche, non stanno facendo altro che *scoprire* queste entità, che già esistevano prima di essere state pensate. L'idea platonista della pratica matematica come scoperta continua è diventata ormai parte del patrimonio culturale collettivo[5].

### 1.1.2 Esiste un'unica risposta esatta

> Man asked, "Is the problem insoluble in all conceivable circumstances?"
> The Cosmic AC said, "No problem is insoluble in all conceivable circumstances."
>
> *Isaac Asimov, The Last Question*

La concezione classica della matematica è contraddistinta da un'ulteriore caratteristica: secondo questa posizione, ciascun problema matematico, da un semplice calcolo a una congettura sofisticata, ha sempre un'unica risposta ben definita. Infatti se gli oggetti matematici esistono in modo indipendente dalle persone che li indagano, per il principio logico del terzo escluso[6] ciascun enunciato matematico non può che essere o vero, o falso, e la sua verità o falsità è determinata in modo assoluto. Per esempio, l'*Ultimo Teorema di Fermat*[7] è sempre stato vero, fin da prima di essere formulato dal magistrato francese Pierre Fermat nel 1637 e dimostrato da

quasi mai sufficiente a giustificare l'uso di modelli tanto complessi.

[5] Al punto da aver anche dato il nome a una serie di ottimi libri per la didattica nella scuola secondaria scritti dal matematico Giovanni Prodi, che appunto si intitolavano *Matematica come scoperta* (Prodi 1975).

[6] Secondo il quale una proposizione matematica può essere vera o falsa, e non c'è una terza possibilità.

[7] L'Ultimo Teorema di Fermat afferma che per ogni $n > 2$ non esistono numeri naturali $a, b$ e $c$ che soddisfano l'uguaglianza $a^n + b^n = c^n$.

Andrew Wiles nel 1995. Nell'opera *Senso e Significato* Frege 1892 riassume questa posizione affermando che

*the thought, for example, which we express in the Pythagorean theorem is timelessly true, true independently of whether anyone takes it to be true. It needs no bearer. It is not true for the first time when it is discovered, but is like a planet which, already before anyone has seen it, has been in interaction with other planets.*

Questa posizione si accompagna spesso a uno sguardo ottimista secondo il quale non solo ciascun problema ha un'unica risposta corretta, ma questa risposta può sempre essere determinata, seppur con maggiore o minore sforzo a seconda della sua complessità. Quindi ciascuna congettura prima o poi verrà dimostrata o confutata, e pian piano i matematici saranno in grado di dimostrare ogni proposizione vera e a confutare ogni proposizione falsa.

Uno dei più grandi fautori di questa posizione ottimista è stato il matematico tedesco David Hilbert, che nel suo discorso alla Società degli scienziati e dei fisici tedeschi dell'8 settembre 1930 l'ha sostenuta con grande passione:

*We must not believe those, who today, with philosophical bearing and deliberative tone, prophesy the fall of culture and accept the* ignorabimus[8]. *For us there is no ignorabimus, and in my opinion none whatever in natural science. In opposition to the foolish ignorabimus our slogan shall be: We must know — we will know!*
(Hilbert 1930; Smith 2014)

L'ultima frase riassume molto bene la posizione di Hilbert, al punto da essere diventata l'epitaffio della sua tomba.

## 1.2 La matematica è la disciplina della razionalità e della conoscenza certa

Secondo la concezione classica, la matematica è più di una disciplina universale: essa è anche il modello per eccellenza del pensiero razionale. Questa opinione è sostenuta per esempio da Douglas R. Hofstadter, che nel suo celebre *Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid* pone la logica, che a partire dal XX secolo è diventata una disciplina matematica, oltre che filosofica, alla base della comunicazione stessa:

*it seems that if we want to be able to communicate at all, we have to adopt some common base, and it pretty well has to include logic* (Hofstadter 1999).

La posizione di Hofstadter in realtà è tipica della matematica occidentale: non è un caso che le dimostrazioni matematiche[9] siano state introdotte nella matematica greca e siano intimamente connesse alla logica.

[8]Hilbert si sta riferendo all'aforisma *ignoramus et ignorabimus*, comparso circa cinquant'anni prima in un saggio del medico e fisiologo Emil Du Bois-Reymond (Du Bois-Reymond 1872).

[9]Ci sono due accezioni della parola *dimostrazione*: la prima, che appartiene al campo della logica formale, consiste in una sequenza di proposizioni di una teoria formale, ciascuna delle quali è costruita a partire dagli assiomi e dalle proposizioni precedenti mediante le regole di inferenza della

Le dimostrazioni infatti non nascono contemporaneamente alla matematica, né in tutte le culture in cui questa disciplina si è sviluppata (Boyer e Merzbach 2011; De Villiers 1990; Kleiner 1991). Invece, i primi documenti matematici di ogni civiltà antica discutono situazioni concrete tratte dalla vita quotidiana dell'epoca: dall'amministrazione dei beni alla divisione dei terreni. I problemi presentati in questi ambiti venivano risolti utilizzando regole euristiche delle quali non era spiegata l'origine o l'ambito di applicabilità: probabilmente sono state ottenute utilizzando osservazioni empiriche, ragionamenti plausibili e calcoli. Anche i primi manoscritti greci presentano questa impostazione: è solo con i lavori di Talete, Pitagora ed Eudosso che le diverse pratiche matematiche e le costruzioni geometriche vengono discusse e motivate. Krantz 2007 suggerisce che la pratica di dimostrare i risultati matematici e geometrici, distinta dall'esposizione di una procedura che permette di ottenerli, sia nata nella scuola di Pitagora, forse legata al misticismo che circondava l'idea di numero.

Gli storici della matematica non hanno raggiunto un consenso sui motivi che abbiano spinto i matematici greci a sviluppare l'idea di dimostrazione. Alcune ipotesi discusse da Kleiner 1991 includono l'esigenza di confrontare alcune formule relative all'area del cerchio, come quelle utilizzate dalla civiltà egizia e da quella babilonese[10]; la struttura culturale e sociale della Grecia antica, per cui l'argomentazione delle idee in modo strutturato e convincente era una delle caratteristiche fondamentali sia nella vita politica sia nella filosofia; e infine la necessità di comunicare i risultati matematici e trasmetterli nelle scuole[11].

La maturità del concetto di dimostrazione è stata raggiunta da Euclide e Aristotele, ai quali si deve l'impostazione della matematica secondo un metodo ipotetico-deduttivo basato sulla logica. Gli *Elementi* di Euclide sono il trattato matematico che da sempre costituisce il modello per eccellenza di questa impostazione: innanzitutto, ciascun risultato deve essere enunciato in modo chiaro utilizzando solamente termini già definiti; in secondo luogo, deve essere ottenuto a partire da proprietà già dimostrate utilizzando le regole elementari della logica. Per evitare un regresso all'infinito nelle definizioni e nelle dimostrazioni, occorre individuare alcune definizioni e proprietà fondamentali, chiamate postulati o assiomi[12], la cui verità è assunta senza giustificazioni.

Le dimostrazioni greche hanno due caratteristiche ricorrenti: sono verbali e pre-

teoria. La seconda, quella usata nel linguaggio quotidiano, indica un'argomentazione in grado di convincere anche gli specialisti più scettici della verità di un'affermazione (Hersh 1993). Per alcuni matematici, ma non per tutti, questa seconda definizione è equivalente a un ragionamento che, in linea di principio, può essere tradotto in una dimostrazione formale del primo tipo. Dal punto di vista storico, le dimostrazioni dall'antichità fino al XIX secolo devono essere intese nell'accezione quotidiana di argomentazione convincente, in quanto la logica formale si è sviluppata solo tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX secolo.

[10] Secondo la matematica egizia, l'area di un cerchio di raggio $r$ misurava $\frac{256}{81}r^2$, mentre secondo quella babilonese misurava $3r^2$.

[11] Se questa interpretazione fosse confermata, le dimostrazioni sarebbero una delle prime tecniche di comunicazione della matematica della storia occidentale.

[12] Nella matematica contemporanea i due termini sono sinonimi. Per i greci, i termini αξίωμα e αιτηµάτα assumono due significati differenti: gli assiomi descrivono delle proprietà empiricamente evidenti, mentre i postulati sono delle richieste di lavoro, che non necessariamente devono apparire evidenti al lettore.

sentano costruzioni con strumenti, come per esempio la riga e il compasso[13]. Le spiegazioni e le costruzioni sono connesse tra loro utilizzando le regole elementari della logica, fondamentale per tutta la tradizione del pensiero greco. Il legame tra dimostrazioni matematiche e logica è rimasto costante in tutta la storia della matematica; la loro storia è discussa in modo approfondito per esempio da Kleiner 1991, Krantz 2007, Kutrovátz 2002 e L. Rogers 2008.

Siccome la logica è la disciplina del ragionamento corretto, cioè la disciplina che descrive in modo fedele in che modo è possibile passare da premesse vere a conclusioni vere, partendo da premesse vere, gli assiomi, il metodo matematico non può che produrre conoscenza certa. Questa posizione non è stata messa in discussione neppure dalla cosiddetta *crisi dei fondamenti* che ha interessato la matematica tra la seconda metà del XIX secolo e la prima metà del XX secolo. Al contrario, una volta che i vari settori della matematica sono stati formulati secondo un'impostazione assiomatica, in un certo senso seguendo lo spirito degli *Elementi*, la fiducia nella certezza dei risultati di questa disciplina si è rafforzata (Berts 2016).

Uno dei matematici che, nel periodo della crisi dei fondamenti, sostenne con fermezza la certezza della conoscenza matematica fu Hilbert, che nel 1925 a Münster si espresse in questi termini:

> *One can claim [...] that [the science of mathematics] is an apparatus that must always yield correct numerical equations when applied to integers* (Hilbert 1967).

Secondo Hilbert, quindi, la matematica è paragonabile a una scienza empirica che, se usata correttamente, fornisce sempre risultati corretti. Il matematico tedesco assunse una posizione ancora più forte nel al Congresso Internazionale dei matematici di Bologna del 1928, nel quale sostenne non solo che i calcoli sui numeri naturali sono sempre corretti, ma che tutte le verità matematiche sono *assolutamente certe*:

> *The mathematical truths are absolutely certain, for they are proved on the basis of definitions through infallible inferences. Therefore they must also be correct everywhere in reality* (Hilbert 1998).

Da questi passaggi emerge che, per Hilbert, le verità matematiche coincidono con i teoremi dimostrati. Questa convinzione, insieme a quella di poter dare una risposta a ogni domanda, è un'altra caratteristica fondamentale del platonismo: tutto ciò che è dimostrabile corrisponde a una proprietà degli oggetti matematici, e viceversa tutte le proprietà degli oggetti matematici si possono dimostrare.

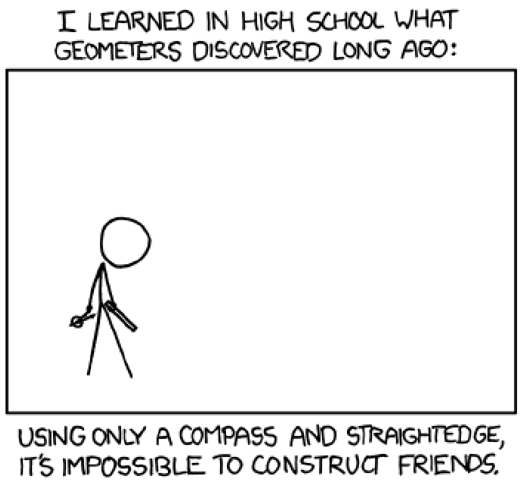
La matematica però non produce conoscenza certa solo nel regno astratto dei numeri e delle forme: grazie al suo carattere di disciplina quantitativa, assoluta e certa, costituisce lo strumento fondamentale per lo studio del mondo fisico. Questa posizione non è stata sostenuta solo dai matematici: forse uno degli scienziati che ha espresso quest'idea nel modo più chiaro e poetico è stato Galileo, quando ne (Galilei 1623) scrisse:

[13]I matematici greci conoscevano molte altre curve, tra cui la quadratrice e la trisettrice, che permettono per esempio di quadrare il cerchio e trisecare l'angolo; eppure nell'antichità queste curve non sono mai state assunte alla base di qualche teoria assiomatica della geometria, al contrario di quanto è accaduto per i segmenti di retta e per le circonferenze.

*L'universo [...] è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola Il Saggiatore.*

Non è casuale che Galileo faccia riferimento in particolare alle figure geometriche: nel XVII secolo la geometria era ancora ritenuta come la più rigorosa tra le discipline, con gli *Elementi* come modello di conoscenza certa e rigore di pensiero da imitare. La posizione di Galileo però si spinge oltre il platonismo. Secondo lo scienziato pisano, la matematica è una componente indispensabile per l'indagine del mondo naturale: senza matematica, infatti, è impossibile capire il funzionamento dell'universo.

### 1.2.1 La matematica è rigorosa




*Randall Munroe, XKCD*

A partire dalla sistematizzazione della geometria da parte di Euclide, passando per la maturazione del linguaggio simbolico dell'algebra e per la sistematizzazione dei vari ambiti della matematica dopo la crisi dei fondamenti, numerosi esempi della storia della matematica mostrano come una sistematizzazione della disciplina sia stata fondamentale per favorirne il progresso (Boyer e Merzbach 2011; Kleiner 1991; Maracchia 2013).

Il concetto di rigore in matematica è però di difficile indagine, anche perché non ne esiste una definizione operativa, che spieghi il significato della parola nella pratica matematica e nella didattica. L'unica definizione formale di rigore è infatti quella della *scuola formalista* di Hilbert, secondo la quale una teoria è rigorosa quando è stata assiomatizzata; analogamente, una dimostrazione in questa teoria è corretta solo quando è costruita a partire dagli assiomi e dalle proposizioni dimostrate in precedenza mediante le regole di deduzione ammissibili.

In contesti informali, il rigore viene collegato per esempio alla padronanza del linguaggio tecnico della disciplina, all'uso corretto dei simboli, ma soprattutto ai ragionamenti esposti in modo ordinato e che non presentino lacune nei passaggi logici. Alcuni autori, tra cui Kitcher 1981, ritengono che quest'ultima sia la caratteristica fondamentale del ragionamento rigoroso. Nella didattica, il rigore assume una sfumatura ancora diversa e spesso si identifica con una padronanza delle procedure e della capacità di calcolo (Hull, Balka e Miles 2013; Lockhart 2009).

Quest'ultima concezione del rigore è stata criticata in diversi studi recenti, tra cui (Carlson 2016; Louisiana Department of Education 2017). Carlson scrive:

> *schools often interpret rigor in a way that uses procedural memorization and repetition as the primary learning means. And in many cases, the quest for rigorous education has translated to arduous, inflexible, and harsh learning experiences.*

Oggi, anche alla luce delle difficoltà emerse nel confronto con i nuovi test standardizzati a livello nazionale e internazionale, si sta cercando di ridefinire il rigore nella retorica della didattica; alcune proposte in questa direzione sono presentate nella Sezione 4.2.3.

# Capitolo 2

# Le dinamiche dell'invenzione matematica

La concezione platonista è stata per secoli la posizione dominante nella filosofia della matematica (Hersh 1997b). Nel corso del XX secolo hanno iniziato a emergere degli sguardi alternativi, in parte motivati dall'osservazione delle dinamiche con cui viene prodotta nuova matematica.

L'interesse nei loro confronti risale all'inizio del XX secolo, quando alcuni autori, tra cui Poincaré, Hardy, Hadamard e Polya, hanno iniziato a riflettere sul loro modo di affrontare problemi matematici. Hadamard 1954 indica questa attività di produzione di nuovi risultati matematici con l'espressione *invenzione matematica*.

Secondo alcuni autori contemporanei, la dinamica di invenzione matematica si sviluppa su tre livelli: a livello individuale si trovano i processi cognitivi che portano all'invenzione matematica (Hadamard 1954; Poincaré 1910; Polya 1954a; Polya 1954b), a livello sociale avviene invece la verifica e consolidamento dei risultati prodotti a livello individuale, che entrano poi nella storia della matematica. A questo ultimo livello i risultati non rimangono cristallizzati nella loro formulazione originale, ma vengono assorbiti nella cultura matematica e cambiano seguendo le correnti socio-culturali presenti nel contesto storico in cui operano gli scienziati (Lakatos 1976; Brown 2018).

## 2.1 Gli strumenti cognitivi dell'invenzione matematica

Secondo Ernest, Polya e Sfard, la pratica matematica si avvale principalmente di cinque strumenti cognitivi: oggettivazione, osservazione, generalizzazione, specializzazione e analogia.

### 2.1.1 Oggettivazione

L'oggettivazione consiste nella trasformazione di processi in oggetti. Questa dinamica avviene già con la formazione del concetto di numero naturale: dal processo di enumerazione, e quindi del numero come attributo apposto a oggetti materiali, produce un concetto di numero slegato da un contesto materiale (Ernest 2016; Ernest 2018; Sfard 1991; Sfard 1994; Sfard 2016). Sfard descrive questa dinamica mediante un esempio: l'uguaglianza $3 + 4 = 7$, che implicitamente intende i numeri come oggetti con delle proprietà, è l'oggettivazione del seguente processo:

*Se ho un insieme tale che tutte le volte che conto i suoi elementi arrivo alla parola* tre *e mi fermo, e ho un secondo insieme tale che tutte le volte che conto i suoi elementi arrivo alla parola* quattro *e mi fermo, e se metto insieme gli elementi dei due insiemi, allora se conto gli elementi del nuovo insieme, arrivo sempre alla parola* sette *e mi fermo* (Sfard 2016).

Questo è un tipico esempio di oggettivazione, cioè di passaggio dai processi agli oggetti, o dai verbi ai sostantivi. Nell'esempio di Sfard, gli invarianti vengono indicati mediante le espressioni *tutte le volte che* e *arrivo sempre*.

L'oggettivazione permette di sintetizzare le informazioni in formati molto più semplici da manipolare; di conseguenza, mediante oggettivazioni successive è possibile strutturare nuove idee che difficilmente sarebbero potute emergere dalla sola analisi delle procedure. Infatti, se già i numeri naturali si possano ottenere mediante l'oggettivazione di un processo articolato come il contare, altri oggetti matematici più sofisticati sono costruiti mediante una stratificazione di oggettivazioni successive[14]. Eppure nella pratica quotidiana della matematica non è quasi mai necessario pensare ai vari oggetti matematici come a processi complessi: è sufficiente utilizzarli come se fossero oggetti.

L'oggettivazione nasconde almeno un pericolo: se gli oggetti matematici sono costruiti a oggettivando delle procedure, chi non le padroneggia potrebbe avere difficoltà nella comprensione e nell'uso dell'oggetto matematico corrispondente (Sfard 2016).

### 2.1.2 Osservazione, generalizzazione, specializzazione

Secondo Polya (Polya 1954a; Polya 1954b), gli strumenti cognitivi comunemente usati nella pratica matematica sono osservazione, generalizzazione e specializzazione.

Polya ritiene che l'osservazione in matematica sia paragonabile agli esperimenti nelle altre scienze: è grazie a essa che si acquisisce familiarità con l'oggetto del proprio studio, sia esso un fenomeno fisico o un concetto matematico più astratto, ed è solo in seguito a un periodo di osservazione che è possibile formulare le prime congetture in merito a un problema.

L'osservazione in matematica però non consiste in esperimenti su oggetti fisici, come per esempio la dissezione di una rana o la collisione di fasci di protoni a velocità prossime a quelle della luce in un acceleratore di particelle. Invece, siccome gli oggetti osservati sono ideali, l'indagine avrà delle caratteristiche differenti.

I metodi di osservazione tipici della matematica si possono mostrare attraverso

[14]Per esempio, nella matematica moderna i numeri reali si possono definire come classi di equivalenza di successioni di Cauchy di numeri razionali, i numeri razionali come classi di equivalenza di numeri interi, i numeri interi come classi di equivalenza di numeri naturali. Le successioni di Cauchy invece sono funzioni definite sui numeri naturali a valori razionali che rispettano una condizione di crescita asintotica.

esempi: Polya 1954a propone quello della genesi della proposizione *ogni numero pari che non è primo o il quadrato di un primo è la somma di due numeri primi dispari.* Un esempio analogo può essere l'analisi del teorema

*ogni numero naturale maggiore di* 1 *si può scrivere in modo unico come prodotto di primi.* ($\heartsuit$)

Per arrivare a formulare l'enunciato del teorema, occorre innanzitutto avere dimestichezza con l'operazione di divisione tra numeri naturali. Dopo aver effettuato un certo numero di divisioni, si incontrano alcuni numeri, come 1, 13, 29, i cui unici divisori sono 1 e il numero stesso. I numeri maggiori di 1 che godono di questa proprietà sono stati distinti dai numeri maggiori di 1 che hanno più di due divisori, e sono stati chiamati *primi*[15]. In seguito alla classificazione dei numeri maggiori di 1 tra primi e composti, è possibile verificare che alcuni numeri naturali possono essere scritti in modo unico come prodotto di primi: per esempio $34 = 2 \cdot 17$, $257 = 257$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, $1028 = 2 \cdot 2 \cdot 257$. Questo è un esempio di osservazione in matematica.

Il passaggio da questa osservazione che riguarda alcuni numeri specifici alla congettura *ogni numero naturale maggiore di* 1 *può essere scritto in modo unico come prodotto di primi* è definito da Polya con il nome di *generalizzazione.*

La generalizzazione, secondo Polya, consiste nel passare da un insieme[16] a un insieme che include quello di partenza. Inoltre, le generalizzazioni non vengono effettuate secondo criteri arbitrari, ma conservando delle caratteristiche precise dell'insieme di partenza[17]. Per esempio, nel passare dall'osservazione che alcuni numeri naturali possono essere scritti in modo unico come prodotto di primi alla congettura ($\heartsuit$), la generalizzazione è avvenuta sostituendo una variabile, cioè un numero generico, a una costante, cioè a ciascuno dei numeri 34, 257, 360, 1028 esaminati in precedenza. Questa non è l'unica generalizzazione possibile: è possibile anche rimuovere un vincolo, come per esempio nel passaggio dallo studio delle radici reali di equazioni polinomiali allo studio delle loro radici complesse.

Una volta generalizzata l'osservazione che ogni numero naturale maggiore di 1 può essere scritto in modo unico come prodotto di primi, occorre darne una dimostrazione oppure confutarla. Per avvicinarsi a una di queste due conclusioni è possibile mettere ulteriormente alla prova la congettura verificandola su altri casi particolari. Nell'analisi della congettura ($\heartsuit$), si potrebbe per esempio controllare se anche i numeri 549, 848, 9843 ammettono un'unica scomposizione in fattori primi. Effettuando la divisione, si può osservare che in effetti $549 = 3 \cdot 3 \cdot 61$, $848 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 53$ e $9843 = 3 \cdot 17 \cdot 193$.

[15] I numeri naturali maggiori di 1 che non sono primi sono chiamati *composti.* Utilizzando un principio estetico arbitrario ma straordinariamente diffuso, i matematici si sono accordati per considerare il numero 1 né primo, né composto: la teoria corrispondente risulta più elegante rispetto a quella nella quale 1 è un numero primo.

[16] Inteso informalmente come *collezione di oggetti* e non come insieme in senso matematico, anche se talvolta le due accezioni coincidono.

[17] Se le generalizzazioni venissero effettuate con criteri arbitrari, si potrebbero considerare moltissime generalizzazioni di $P(2) = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 : a^2 + b^2 = c^2\right\}$, che però risulterebbero poco significative. Un esempio di generalizzazione significativa effettuata secondo il metodo de-

Questo passaggio da una congettura generale alla verifica di alcuni esempi particolari viene indicata da Polya con il nome di *specializzazione*. La definizione che Polya fornisce della specializzazione è duale rispetto a quella della generalizzazione: si specializza quando si passa da un insieme a un suo sottoinsieme. Anche in questo caso valgono le precisazioni discusse in merito alla definizione di generalizzazione: i metodi di specializzazione raramente sono arbitrari, ma spesso mantengono alcune caratteristiche dell'insieme di partenza. Quindi due metodi diffusi di specializzazione consistono nell'assegnare un valore costante a una variabile, oppure di introdurre un vincolo.

La specializzazione può aiutare i matematici a trovare dei metodi per dimostrare o confutare una congettura, ma può anche costituire un passaggio intermedio nella dimostrazione di una congettura più ampia: per esempio, ($\heartsuit$) può essere vista come la congiunzione di due congetture ottenute per specializzazione:

1. ogni numero naturale maggiore di 1 può essere scritto come prodotto di primi;
2. se un numero naturale maggiore di 1 può essere scritto come prodotto di primi, questa scrittura è unica.

Per dimostrare ($\heartsuit$), è sufficiente dare una dimostrazione di ciascuna delle due congetture intermedie 1. e 2. Questa tecnica di dividere una congettura difficile da dimostrare in due parti più semplici è stata utilizzata nella dimostrazione di importanti risultati della storia della matematica, come il *teorema dei quattro colori*.

La specializzazione si può utilizzare anche per un altro tipo di ragionamento, che Mazur chiama *ragionamento dalle conseguenze*. Questo modo di procedere si può riassumere nella massima: *se supporre vera una congettura conduce a conclusioni corrette, la fiducia nella verità della congettura aumenta* (Mazur 2014). Il ragionamento dalle conseguenze, che dal punto di vista logico è fallace, costituisce un'euristica che ancora oggi guida la ricerca matematica in diverse occasioni[18].

Una catena di equivalenze che appaiono tutte ugualmente plausibili o implausibili non permettono però di determinare la verità o la falsità di ciascuna congettura. Un esempio che mostra questo limite del ragionamento dalle conseguenze riguarda Girolamo Saccheri: nel tentativo di dimostrare per assurdo che il quinto postulato di Euclide è una conseguenza degli altri principi della geometria euclidea, il matematico italiano ha ottenuto diversi teoremi di geometria iperbolica equivalenti alla sua negazione. Per Saccheri, però, questi risultati sembravano implausibili, tant'è che ai termini dei suoi studi la confidenza che egli riponeva nella possibilità di dimostrare il postulato delle parallele a partire dagli altri postulati della geometria euclidea è aumentata. L'esempio di Saccheri ricorda che il ragionamento dalle conseguenze non è una vera e propria dimostrazione: dedurre risultati corretti a partire dall'ipotesi che una congettura sia vera non è sufficiente a determinarne la verità o la falsità. Nella matematica classica il ragionamento dalle conseguenze diventa una vera e propria dimostrazione per assurdo solo se, a partire dall'ipotesi che una congettura sia vera, si ottiene una conseguenza contraddittoria.

---

scritto da Polya consiste invece nel passare dall'insieme $P(2)$ agli insiemi della forma $P(k) = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3 : a^k + b^k = c^k\}$.

[18]Per esempio, nello studio della *congettura di Schanuel* sulla struttura dei numeri complessi.

### 2.1.3 Analogia

Polya discute infine un'ulteriore strumento cognitivo a disposizione dei ricercatori: l'analogia. Al contrario di quanto accade per la generalizzazione e la specializzazione, il matematico ungherese non la definisce in modo preciso, ma ne mostra alcuni esempi: un triangolo è analogo a un tetraedro nel senso che il triangolo è il poligono con il numero minore di lati nel piano euclideo, mentre il tetraedro è il poliedro con il numero minore di facce nello spazio euclideo.

Oltre all'analogia già discussa, ne esistono molte altre che legano un triangolo a un altro oggetto geometrico dello spazio euclideo. Per esempio un triangolo può essere analogo a una piramide a base arbitraria, oppure a un triangolo su un sottospazio affine di dimensione 2 dello spazio euclideo. Polya stesso osserva che tra diversi oggetti matematici possono esserci molte analogie, ciascuna delle quali è

*reasonable, valuable at its place. There are several analogies between plane and solid geometry and not just one privileged analogy.*

Allo stesso modo, ci sono molte analogie tra ambiti apparentemente diversi della matematica, o anche tra la matematica e altre discipline[19]

Generalizzazione, specializzazione e analogia sono quindi strumenti che concorrono all'invenzione matematica; in alcuni casi consentono anche di descrivere le relazioni che esistono tra alcuni teoremi matematici, come illustrato in Figura 2.1.

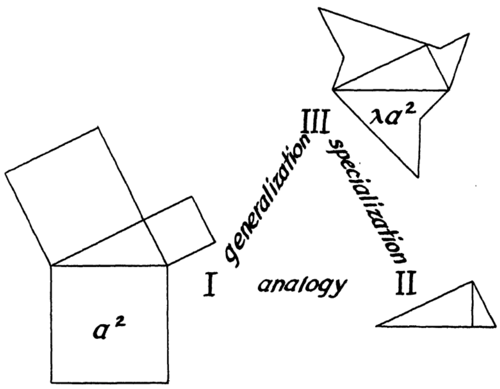



Figura 2.1: Le relazioni di generalizzazione, specializzazione e analogia tra il teorema di Pitagora, il teorema di Euclide e una generalizzazione del teorema di Pitagora. Immagine tratta da (Polya 1954a).

## 2.2 La psicologia dell'invenzione matematica

In che modo a partire da una congettura si giunge a una dimostrazione o, in altre parole, qual è la dinamica dell'invenzione in matematica? La risposta a questa

[19]Una delle analogie più fruttuose del XX secolo è stata l'invenzione della distribuzione $\delta$ da parte del fisico Paul Dirac: la sua esigenza di descrivere dal punto di vista matematico un impulso istantaneo ha portato alla creazione della teoria delle distribuzioni, uno degli strumenti matematici

domanda non si trova nei libri scolastici, ma nemmeno negli articoli di ricerca o nei seminari accademici. Fino alla prima metà del XX secolo gli unici indizi che consentono una ricostruzione della dinamica dell'invenzione matematica erano le testimonianze dirette dei ricercatori. (Poincaré 1910), per esempio, si accorse che il suo lavoro era costantemente caratterizzato da *illuminazioni improvvise*, che descrisse in questi termini:

> *I turned my attention to the study of some arithmetical questions apparently without much success [...]. Disgusted with my failure, I went to spend a few days at the seaside, and thought of something else. One morning, walking on the bluff, the idea came to me, with [...] the [...] characteristics of brevity, suddenness, and immediate certainty.*

Circa quarant'anni più tardi dalla pubblicazione dell'articolo di Poincaré, Hadamard ha provato a studiare più approfonditamente quali siano le condizioni che portano alle intuizioni improvvise che sono così comuni nei racconti dei matematici. Secondo l'analisi di Poincaré e di Hadamard, il momento di chiarezza nel quale si intuisce una soluzione a un problema costituisce il terzo passo del processo di invenzione. Questo incomincia con una fase preparatoria, prosegue con un periodo di incubazione, culmina nell'intuizione e richiede un successivo momento di verifica.

### 2.2.1 Prima di cominciare: un problema

Secondo Hersh 1997b, alla base dell'invenzione matematica c'è l'esigenza di risolvere un problema. I problemi matematici non sono sempre motivati da necessità di ordine pratico, ma possono anche essere frutto della curiosità dei ricercatori e non avere alcune applicazioni immediate. Uno dei teoremi più celebri, l'Ultimo Teorema di Fermat, è stato concepito da Pierre Fermat come generalizzazione del teorema di Pitagora, senza alcuna applicazione concreta. Senza una domanda che muova il ricercatore, infatti, il processo di invenzione matematica non può neppure incominciare.

### 2.2.2 Primo passo: preparazione

Le persone che non si sono mai occupate di ricerca matematica non hanno mai provato l'esperienza descritta da Poincaré, cioè di trovare la soluzione a un problema matematico in un momento di improvvisa illuminazione: infatti esse richiedono una fase preparatoria, talvolta lunga e faticosa.

Di fronte a un problema, il primo passo che porta all'invenzione matematica consiste nella familiarizzazione con il problema stesso. Per esempio, se si desidera studiare una certa congettura sui numeri naturali occorre acquisire dimestichezza con le loro proprietà, mentre per descrivere dal punto di vista matematico l'interazione tra una popolazione di prede e una di predatori è utile comprendere le dinamiche che avvengono tra queste due specie. Questo momento iniziale di indagine richiede la scelta volontaria e perseverante di dedicare al problema quella che Hadamard, citando Delacroix, definisce una *tenace e fedele attenzione*.

Nella fase preliminare di indagine, i ricercatori entrano in contatto con le definizioni degli enti matematici coinvolti nel problema e se ne forma delle rappresentazioni interiori. Secondo Vinner e Hershkowitz 1980 e Tall e Vinner 1981, queste rappresentazioni interiori si possono classificare in due tipi: le *concept image* e le *concept definition*. Le concept image si possono descrivere come le immagini mentali che una persona associa a un concetto: per esempio, alcune concept image dei numeri naturali sono i segni con cui vengono scritti, come 1, 2, 3; l'idea che i numeri siano divisi in pari e dispari; l'infinità dei numeri; o la loro disposizione su una semiretta ordinata come quella riportata in Figura 2.2.


Figura 2.2: Una rappresentazione della *linea dei numeri*.

La concept definition di un concetto, invece, costituisce in una sua definizione , tipicamente verbalizzata. Nella vita quotidiana, mentre a ogni oggetto o idea è associata una concept image, non sempre è presente una concept definition: per esempio, idee complesse come *amore* o *gioco* sono spesso trasmesse per mezzo di *definizioni ostensive*, cioè mostrando cosa voglia dire amare o giocare[20]. In matematica, fino all'inizio del XX secolo non esisteva una buona concept definition dei numeri naturali, nonostante i tentativi di definizione di quasi duemila anni di storia della matematica. Con la ristrutturazione della matematica secondo il metodo assiomatico, avvenuta tra il XIX e il XX secolo, la quasi totalità degli enti matematici ha ricevuto una concept definition, che assume la forma o di una definizione in termini di oggetti già introdotti, o di una cosiddetta *definizione implicita* ottenuta a partire dagli assiomi alle basi della relativa teoria. La concept definition dei numeri naturali, presentata nella Sezione 3.2.2, appartiene a questa seconda categoria.

Durante la fase di preparazione, quindi, i matematici studiano le concept definition degli oggetti coinvolti nella ricerca e cercano di formarsene delle buone concept image che li possano guidare durante il processo di invenzione.

In questa indagine preliminare è inevitabile commettere errori, e neppure il più esperto dei matematici ne è immune: è possibile mal interpretare una definizione, formarsi un'idea sbagliata di un concetto o provare ad affrontare un problema con degli strumenti inadeguati, anche se non necessariamente scorretti. La caratteristica che distingue il ricercatore dal dilettante non è la presenza o l'assenza di errori nei ragionamenti, ma è la capacità di rendersi conto degli errori commessi e di correggerli[21]. Alcuni autori, come Popper, Fischbein e Zan, sostengono che gli errori non vadano evitati, ma che costituiscano, con le parole di Zan 2007,

*un momento ncessario nell'evoluzione da un certo livello di conoscenza a uno superiore.*

più utili del XX secolo.

[20]Il game designer Mark Rosewater ha proposto la seguente definizione di gioco: *a thing with a goal (or goals), restrictions, agency, and a lack of real-world relevance* (Rosewater 2018).

[21]Secondo Tao 2009, i matematici professionisti effettuano anche errori di tipo diverso e che rimangono circoscritti a un livello *locale*, senza intaccare la validità *globale* dei loro ragionamenti.

Mentre familiarizzano con un problema e costruiscono le relative rappresentazioni interiori degli oggetti coinvolti, i matematici affrontano spesso una fase di indagine più specifica, volta a scegliere gli strumenti che desiderano utilizzare per affrontare il problema. Infatti raramente un problema di matematica moderna ammette una sola formulazione e una soluzione canonica: nella maggior parte dei casi, le preferenze di metodo dei ricercatori influenzano il metodo d'indagine e, di conseguenza, le soluzioni ammissibili.

La possibilità di affrontare un problema con molti approcci, talvolta incompatibili tra loro, può portare a una seconda obiezione alla concezione platonista della matematica e all'idea conseguente che la matematica sia solo una scoperta. Da un lato, infatti, nella pratica matematica c'è l'autonomia con cui i ricercatori scelgono i metodi di indagine, e dall'altro è necessaria la verifica che l'approccio scelto permetta di risolvere in modo soddisfacente il problema di partenza. Per questo, Hersh 1997b suggerisce che la pratica matematica sia composta da un alternarsi di momenti di *invenzione* o *costruzione* e da momenti di *scoperta* o *verifica*.

La fase di preparazione è generalmente l'unica necessaria per trovare una soluzione accettabile alla maggior parte dei problemi meno complessi e agli esercizi nei quali è richiesto applicare un insieme di regole fissato a priori, come per esempio i calcoli numerici o simbolici. Per i problemi più complessi è talvolta necessario spingere il lavoro di indagine tenace fino al fallimento totale, come nell'episodio descritto da Poincaré. Il fallimento però non determina la conclusione negativa della ricerca matematica, ma al contrario può suggerire che è giunto il momento di passare allo stadio successivo del processo di invenzione.

### 2.2.3 Secondo passo: incubazione

Nel racconto di Poincaré, tra la fase iniziale di ricerca infruttuosa e il momento dell'illuminazione è trascorso un periodo intermedio che Hadamard indica con il termine di *incubazione*, nel quale il matematico francese si è dedicato ad altri pensieri. Anche Hadamard concorda con l'opinione di Poincaré secondo la quale, una volta acquisita dimestichezza con un problema e dopo aver esaurito ogni possibilità di attacco, per favorire l'invenzione matematica può essere utile un periodo di pausa. Questa pausa può consistere in una vacanza o, più tipicamente, in un tipo diverso di lavoro.

Uno dei motivi per cui può essere proficuo dedicarsi allo studio di un altro problema durante la fase di incubazione è la possibilità di cogliere delle analogie tra i due ambiti di ricerca, per cui ciascuna delle due indagini sostiene ed è sostenuta dall'altra. Non ci sono molti altri consigli pratici legati alla fase di incubazione: Hadamard commenta che non è utile né concentrare troppo l'attenzione su un singolo problema, né disperderla in numerose direzioni.

Sia Poincaré sia Hadamard cercano di spiegare il periodo di incubazione sostenendo che l'invenzione matematica consista almeno in parte nel trovare combinazioni nuove di pensieri e che il periodo di incubazione sia il tempo necessario all'inconscio per vagliare un gran numero di queste combinazioni. Le combinazioni che sopravvivono al vaglio dell'inconscio sono quelle che emergono nella terza fase di invenzione matematica: quella dell'intuizione.

### 2.2.4 Terzo passo: intuizione

Nella storia della matematica sono riportati diversi episodi nei quali è stato possibile risolvere un problema aperto da tempo grazie a delle intuizioni improvvise. Uno dei più antichi è quello di Archimede che, di fronte al problema determinare le proporzioni di oro e argento nella corona di Gerone, tiranno di Siracusa, intuì la soluzione mentre si rilassava durante un bagno pubblico. Oggi questo episodio è ritenuto frutto di un'invenzione dei biografi, al pari di quello della caduta della mela che avrebbe portato Newton a formulare la teoria della gravitazione universale. Al di là di questi aneddoti, Poincaré e Hadamard sostengono che il terzo passo dell'invenzione matematica sia costituito proprio da un'improvvisa intuizione che permette di superare un momento di empasse nella ricerca.

Un momento di invenzione ben documentato è stato l'invenzione dei quaternioni da parte di Sir William Rowan Hamilton. Il matematico irlandese si stava confrontando con il problema di definire un'estensione dei numeri complessi a numeri con una parte reale e due parti immaginarie. La sua difficoltà consisteva nel definire una moltiplicazione tra le due parti immaginarie che fosse coerente con quella dei numeri complessi. Dopo aver riflettuto a lungo su questa difficoltà, durante una passeggiata al parco con la moglie ebbe l'intuizione di come il problema della moltiplicazione potesse essere risolto lavorando non con due parti immaginarie, ma con tre, e rinunciando alla proprietà commutativa. In una lettera al figlio Archibald, descrive il momento dell'invenzione con queste parole:

> *An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald (as I foresaw, immediately) of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery* (Hamilton 1865).

La natura dell'intuizione matematica è principalmente di due tipi: una, più rara, consiste nella comprensione di un risultato compiuto, mentre l'altra, più comune, consiste nell'intravedere una nuova direzione verso la quale proseguire la ricerca. Dal resoconto di Hamilton si può osservare come anche l'intuizione di un risultato compiuto, in questo caso la definizione del prodotto delle tre unità immaginarie dei quaternioni, non sia il termine dell'invenzione matematica, ma come al contrario apra la strada a un ulteriore lavoro. Questo lavoro reso possibile dall'intuizione è il quarto passo dell'invenzione matematica.

### 2.2.5 Quarto passo: sistematizzazione

L'ultimo passo dell'invenzione matematica consiste nella sistematizzazione dei risultati ottenuti nel passo di intuizione. Questo momento ha diversi scopi, a partire dalla verifica che l'idea intuita risponda o meno alle esigenze del problema (De Villiers 1990). Infatti, oltre ai casi di intuizioni corrette che hanno aperto la strada a nuove direzioni di ricerca, come per esempio l'invenzione dei quaternioni da parte di Hamilton, è possibile avere idee che a un'analisi più attenta si rivelano infruttuose. La verifica di un'intuizione inadeguata non è però una perdita di tempo, in quanto può costituire la fase di preparazione necessaria per una nuova invenzione.

La verifica e la sistematizzazione delle intuizioni permette anche ai matematici di valutare i risultati ottenuti, di approfondirli e di riflettere sulla loro portata. Può anche portare a ricominciare il ciclo di scoperta, utilizzando l'invenzione appena ottenuta come punto di partenza per nuovi studi. Questo utilizzo del quarto passo di invenzione è molto comune nei progetti di ricerca articolati, nei quali i risultati più complessi devono appoggiarsi a passaggi intermedi, ciascuno dei quali influenza lo sviluppo della teoria.

Infine, la sistematizzazione delle intuizioni può essere necessaria per la loro comunicazione. In questo caso, la scelta del modo con cui fissare i risultati non può essere lasciata all'arbitrio del ricercatore, ma è guidata dalle convenzioni vigenti nella comunità con la quale il ricercatore desidera rapportarsi. Infatti, è solo con l'interazione di una comunità scientifica che i risultti dei singoli gruppi di ricerca entrano a far parte del patrimonio scientifico Ernest 1997; Lakatos 1976.

## 2.3 La condivisione delle invenzioni

Il processo con cui i risultati dei singoli o dei piccoli gruppi vengono accettati nella comunità degli specialisti avviene secondo un metodo dialettico che Lakatos ha chiamato delle *dimostrazioni e confutazioni* (Lakatos 1976), che può essere visto come un ulteriore passo del processo di invenzione matematica. A differenza dei precedenti, però, non può essere effettuato nella sua interezza da un singolo scienziato, ma si gioca necessariamente nella comunità scientifica.

Secondo Lakatos, infatti, ciascuna invenzione matematica, prima di entrare a pieno titolo nel patrimonio della disciplina, deve passare al vaglio degli esperti, che ne verificano la plausibilità mediante esempi e controesempi, spesso ottenuti secondo i metodi di indagine descritti da Polya. In particolare, i matematici cercano di verificarne la validità di un nuovo risultato non solo per quei casi più ovvi, ma anche per i casi limite, ai quali talvolta lo scopritore non aveva pensato.

In questa indagine possono emergere due tipi di obiezioni, che Lakatos classifica in *controesempi locali* e *controesempi globali*. I primi consistono in critiche mosse ad alcuni passi di una dimostrazione o di un ragionamento, che però non mettono in discussione la validità generale della teoria; invece i secondi consistono in una vera e propria falsificazione della teoria.

Entrambi i tipi di controesempio non portano necessariamente a rifiutare la nuova invenzione: è più comune che portino a una sua revisione critica, con il duplice scopo di mettere la teoria al riparo dai controesempi e di spiegare come questi siano sorti. Le revisioni più comuni avvengono per esempio completando alcune dimostrazioni, aggiungendo delle ipotesi a dei teoremi, oppure addirittura cambiando alcune definizioni degli oggetti matematici coinvolti. Il processo continua fino a quando il risultato viene ritenuto convincente a sufficienza dagli esperti del settore; ciò non esclude che, magari in epoche successive, lo stesso risultato possa essere rivisto nuovamente alla luce di ulteriori critiche.

Lakatos 1976 mostra questo processo dialettico studiando come esempio la *for-*

[22]Secondo la quale in un poliedro regolare con $V$ vertici, $E$ lati e $F$ facce vale la relazione $V + F - E = 2$

*mula di Eulero*[22] in geometria solida. Dalla prima formulazione del matematico svizzero, la congettura è stata rivista alla luce di numerosi controesempi, che hanno richiesto la revisione sia delle sue dimostrazioni, sia della definizione stessa di poligono. L'esempio presentato da Lakatos non è un caso isolato nella storia della matematica: molti altri concetti matematici, tra cui quello di *numero naturale*, hanno subito diverse modifiche dalla loro formulazione originale fino alle sistematizzazioni moderne.

### 2.3.1 La comunicazione delle invenzioni matematiche nella comunità scientifica

Nella matematica contemporanea, la condivisione delle invenzioni e il procedimento di maturazione della conoscenza descritto da Lakatos vengono effettuati principalmente con la pubblicazione di articoli su riviste specializzate. La procedura per sottoporre un articolo di ricerca è aperta a tutti, a prescindere dal livello di istruzione e dall'eventuale affiliazione a un ente di ricerca. Una volta sottoposto, l'articolo viene inviato ad alcuni *referee*, tipicamente professori esperti dell'ambito di ricerca, che esprimono un parere sul valore scientifico del lavoro. Se lo ritengono necessario, prima di prendere una decisione i referee possono chiedere all'autore di effettuare una o più revisioni, in modo da sistemare eventuali errori, chiarire i punti meno comprensibili o migliorare il linguaggio. Come descritto da Lakatos, questo momento di revisione costituisce una preziosa occasione per migliorare l'articolo sottoposto.

Il processo di referaggio può essere relativamente rapido, oppure può protrarsi fino a qualche anno. Per questo motivo, alcuni autori scelgono di rendere liberamente disponibili i loro risultati attraverso dei *preprint*, ma, in assenza di referaggio, non è sempre possibile determinare il valore di questi documenti non ufficiali. I preprint svolgono comunque due funzioni molto significative: da un lato, aiutano a dare visibilità alle ricerche senza dover attendere i tempi di lavorazione delle riviste, e in secondo luogo possono aiutare i ricercatori a raccogliere del feedback sul proprio lavoro. Quest'ultimo aspetto è particolarmente rilevante nel caso di articoli che affrontano problemi aperti molto complessi: in questi casi, una prima lettura da parte degli specialisti del settore può aiutare a trovare degli errori prima che il lavoro venga sottoposto a una rivista[23].

La comunicazione delle invenzioni matematiche non è sempre avvenuta attraverso i canali appena descritti: la prima rivista specializzata per la pubblicazione delle ricerche scientifiche, la *Philosophical Transactions of the Royal Society*, è nata nel Regno Unito nel 1665, in un periodo in cui la maggior parte degli scienziati non erano abituati a rendere pubbliche le loro scoperte. Infatti, prima di questo momento i ricercatori diffondevano i loro risultati attraverso la pubblicazione di monografie oppure attraverso il dialogo, per lo più epistolare, con i loro colleghi. Diversi episodi

[23] Un esempio di questa dinamica di referaggio cooperativoè avvenuta nell'estate 2017, quando il professor Norbert Blum ha proposto nel preprint (Blum 2017a) la soluzione di $P$ vs $NP$, uno dei Problemi del Millennio con importanti ricadute sull'informatica (Clay Mathematics Institute 2018). Pochi giorni dopo, grazie anche ai commenti di altri professori esperti del settore, il preprint è stato ritirato e Blum ha pubblicato sulla sua pagina personale una spiegazione dell'errore commesso (Blum 2017b).

della storia delle scienze ricordano che questo scambio di risultati non era sempre effettuato in un clima di cordiale collaborazione, bensì in modo competitivo. Due esempi di pratiche competitive nella storia della matematica europea sono le *disfide matematiche* nelle quali gli scienziati competevano per ottenere posizioni nelle università o nelle corti dei nobili, e la disputa tra Niccolò Tartaglia, Girolamo Cardano e Ludovico Ferrari sulla paternità della formula risolutiva delle equazioni di terzo grado. In entrambi i casi, i matematici avevano l'esigenza di mostrare la propria bravura per assicurarsi posizioni prestigiose, ma avevano l'esigenza di non svelare i propri segreti professionali, sui quali si basavano le loro opportunità di carriera. Per questo, invece di comunicare pubblicamente i risultati ottenuti, si sfidavano nella risoluzione di problemi: in questo modo avevano la possibilità di mostrare quanto fossero efficaci le loro tecniche senza essere costretti a rivelarle[24]. La competitività tra scienziati non è limitata all'Italia del XVI secolo: basti pensare alla violenta disputa tra Newton e Leibniz sul primato dello sviluppo dell'analisi infinitesimale avvenuta circa due secoli più tardi. Il lettore interessato ad approfondire le dispute in ambito matematico può consultare per esempio (Boyer e Merzbach 2011; Hall 2002; Williams e Mazzagatti 1986).

Fino all'introduzione di una notazione simbolica per la matematica, avvenuta in tempi successivi tra il XVI e il XVII secolo, nei rari casi in cui i matematici europei comunicavano esplicitamente le loro formule ai colleghi, queste non erano scritte in prosa, come accadeva invece in filosofia e nelle scienze fisiche. Invece, le formule erano scritte rigorosamente in versi, e in Italia tipicamente endecasillabi. Una poesia studiata ancora oggi per il suo valore scientifico e letterario è *Quando che il cubo con le cose appresso*, composta da Niccolò Tartaglia per comunicare a Cardano la formula risolutiva per le equazioni di terzo grado della forma $x^3 + ax = b$, il cui testo integrale è di pubblico dominio (Fontana 1534).

[24]In un certo senso, questo è stato uno dei primi protocolli di certificazione della conoscenza a informazione nulla, un'idea che ancora oggi si usa nella crittografia moderna.

# Capitolo 3

# Una concezione alternativa della matematica

L'immagine della matematica che sembra emergere dalla discussione delle dinamiche di invenzione matematica è quella di un'attività profondamente umana, fortemente caratterizzata dal contesto sociale dei ricercatori e suscettibile delle loro preferenze personali. Alla luce di queste considerazioni, alcuni autori ritengono che la concezione della matematica presentata nel Capitolo 1 non sia adeguata, ma vada rivista in un'ottica più ampia.

La concezione classica della matematica oggi viene messa in discussione su diversi fronti. L'esistenza di oggetti matematici indipendenti dal mondo fisico, ma comunque percepibili da alcuni esseri umani[25], può essere criticata innanzitutto dal punto di vista epistemologico (Balaguer 2001; Benacerraf 1973; Linnebo 2006).

È possibile muovere ulteriori critiche a questa concezione della matematica anche a partire dall'esame di come essa si sia sviluppata nelle altre culture, come proposto da d'Ambrosio 1985. Il quadro che emerge non è quello di una disciplina dallo sviluppo parallelo in ciascuna parte del mondo, ma di una diversità di pratiche e di concezioni della matematica che in parte si sono perduti in seguito alla colonizzazione culturale da parte dell'Occidente.

Anche limitandosi alla matematica occidentale, secondo Hersh 1997b la concezione classica tiene conto solo dei prodotti finali della ricerca, ma non delle dinamiche di ricerca e di invenzione. Siccome queste dipendono in modo significativo dalle scelte effettuate dai matematici durante i vari passi di invenzione e dall'interazione con le comunità scientifiche, è possibile sostenere che gli oggetti matematici non siano assoluti e immutabili, ma siano invece costruiti proprio nell'interazione tra i ricercatori, che li modificano in base alle loro esigenze e li abbandonano quando il loro ruolo non è più significativo[26].

Anche l'idea della matematica come disciplina della conoscenza certa e della razionalità ha i suoi oppositori: da un lato sono emersi modelli di razionalità alternativi a quello logico-deduttivo, e dall'altro alcuni matematici hanno iniziato a sostenere che le verità di questa disciplina non sono oggettive e assolute, ma al contrario possono essere soggette a errori e a revisioni.

[25] Solo da coloro che, dopo anni di apprendimento, sono diventati esperti della disciplina.

[26] Come è accaduto agli *angoli di contingenza* della geometria euclidea.

## 3.1 La matematica come costruzione sociale

Secondo alcuni matematici, sociologi e antropologi, la matematica non sarebbe assoluta e universale, bensì un prodotto culturale (Ascher 2018; Ernest 1997; Hersh 1997b; A. B. Powell e Frankenstein 1997). Per descrivere la realtà degli oggetti matematici, Hersh 1997b suggerisce che le categorie classiche di oggetti materiali e oggetti ideali non sono sufficienti, ma è invece necessario considerare anche una terza categoria di oggetti generati in un contesto sociale che dà loro significato. Alcuni esempi possono essere il lavoro, il nazionalismo, la Quinta Sinfonia di Beethoven o l'Amleto di Shakespeare: ciascuno di essi slegato dal proprio contesto culturale perde in tutto o in parte il suo significato. Hersh suggerisce che anche gli oggetti matematici e le società degli scienziati, ciascuna con la propria storia e le proprie tradizioni, siano oggetti sociali. Con le sue parole,

> *infinitely smooth infinite dimensional manifolds exist, are real, as shared concepts, part of the shared thinking of mathematicians. This answer does not say they are not real. On the contrary, it explains and locates where and how they are real.*

Alla luce di questa ipotesi è possibile spiegare come in culture diverse siano presenti diversi approcci alla matematica e al ragionamento formale (Bishop 1988; Norenzayan et al. 2002).

Bishop 1990 suggerisce che l'attuale diffusione della matematica occidentale sia una conseguenza delle varie forme di imperialismo perpetrate nel corso degli ultimi secoli. Di conseguenza, invece di concepire la matematica come una disciplina monolitica e universale, sarebbe invece necessario parlare di *etnomatematica*, cioè

> *[of] the mathematics which is practiced among identifiable cultural groups such as national-tribe societies, labour groups, children of certain age brackets and professional classes* (d'Ambrosio 1985).

Vithal e Skovsmose 1997 identificano quattro ambiti di pertinenza dell'etnomatematica: un'attenzione agli *sviluppi storici delle matematiche*, includendo e valorizzando i contributi di quelle società le cui pratiche matematiche non sono state incluse in quella occidentale; lo studio delle pratiche matematiche che sono sopravvissute alla colonizzazione; la conoscenza matematica generata informalmente all'interno delle varie culture; la relazione tra i tre ambiti precedenti e la didattica della matematica.

In alcune società, le diversità culturali e linguistiche[27] sono talmente pronunciate da rendere difficile l'analisi del loro pensiero matematico. Un esempio è dato dalla tribù amazzone dei Pirahã, che secondo alcune ipotesi indica le quantità solo mediante tre parole, il cui significato varia a seconda del contesto[28]. Inoltre, i membri di questa tribù non sembrano aver sviluppato alcun modo per a quantificare con precisione i numeri superiori a tre e la loro comprensione del concetto occidentale di

[27] Ferrari 1999 suggerisce che, anche all'interno di una stessa società, i fattori linguistici giochino un ruolo significativo nella concettualizzazione della matematica. Secondo Sfard 2016, questo potrebbe spiegare alcune differenze nella concezione dell'infinito matematico tra gli studenti occidentali e quelli asiatici.

[28] Attualmente si suppone che queste parole possano essere usate sia per indicare *uno*, *due* e *molti*, sia *pochi*, *un po' di più*, *molti*.

numero, espresso per esempio mediante parole portoghesi, è sostanzialmente assente (Gordon 2004).

L'attenzione alle diverse pratiche matematiche all'interno di varie culture ha contribuito a mettere in discussione l'idea che le verità matematiche siano universali e indipendenti dalle persone che le indagano. I sostenitori di questa posizione suggeriscono invece che la matematica non abbia un carattere assoluto, ma presenti una pluralità di approcci rilevanti non solo dal punto di vista sociologico e antropologico, ma anche per lo sviluppo e la comunicazione della disciplina.

## 3.2 Molte matematiche

Anche focalizzando l'attenzione sulla matematica occidentale, si può osservare che i passi della ricerca matematica hanno una connotazione fortemente creativa: i ricercatori giungono a di nuove idee grazie a una combinazione di impegno tenace e di intuizione, caratteristiche che sono associate anche alle arti creative come la musica, la pittura e la scultura.

Le somiglianze tra queste discipline e la matematica non si fermano alle dinamiche di creazione: infatti, così come gli artisti possono creare le loro opere in molti modi differenti, così i matematici possono utilizzare diversi strumenti per formulare risposte alternative a uno stesso problema. La scelta di questi strumenti è motivata dall'interazione di almeno tre criteri: la consuetudine in uso presso la comunità scientifica della quale il ricercatore fa parte, la potenza espressiva delle diverse teorie matematiche, le preferenze personali del ricercatore.

Nella scelta dei particolari strumenti matematici con i quali affrontare nuovi problemi, a partire dal XX secolo neppure le regole della logica sono ritenute fondamentali e indiscutibili: oggi è possibile scegliere se lavorare con un approccio classico, con uno costruttivo[29] o con uno studiato ad hoc per uno specifico problema. Questi approcci non devono nemmeno essere tutti compatibili tra loro: mentre alcuni di essipossono considerarsi come una specializzazione della logica classica, altri portano a risultati incompatibili con essa (Troelstra e Van Dalen 2014).

Anche nei casi in cui due matematici adottassero strumenti compatibili, il loro modo di procedere sarebbe spesso confrontabile, ma quasi certamente differente. Un esempio è costituito dai lavori di geometria iperbolica di Lobachevsky e Bolyai: mentre il primo si è limitato a negare il quinto postulato di Euclide, il secondo ha deciso di studiare una famiglia di geometrie che dipende da un parametro, generalizzando simultaneamente la geometria euclidea e quella descritta da Lobachevsky[30].

[29]In prima approssimazione, la logica costruttiva rifiuta il *principio del terzo escluso* della logica classica, secondo il quale una proposizione può essere o vera o falsa, senza una terza possibilità.

[30]Un ambito di ricerca moderno nel quale si verifica questo fenomeno è lo studio di alcune equazioni alle derivate parziali non lineari e mal poste che si ottengono come limiti singolari di equazioni ben poste. Esistono almeno due approcci classici al problema: uno mediante il metodo delle caratteristiche e l'altro mediante la teoria delle soluzioni deboli che rispettano delle disuguaglianze di entropia (Bressan 2013; Renardy e R. C. Rogers 2004). Lo stesso problema però si può descrivere anche nei termini dell'analisi non standard: in questo caso lo studio del limite singolare di una famiglia di problemi che dipende da un parametro reale viene rimpiazzato dallo studio di un unico problema che dipende da un parametro *iperreale* (Benci e Luperi Baglini 2017; Benci e Luperi Baglini 2014), oppure da una discretizzazione di passo infinitesimo (Bottazzi 2017). Per uno

Questa varietà di sguardi si ha non solo durante l'invenzione, ma anche nel consolidamento e nella riappropriazione di risultati del passato. Un esempio è la dimostrazione dell'infinità dei numeri primi: in Euclide il teorema è enunciato non facendo riferimento a un'infinità attuale, ma affermando che la quantità di numeri primi è maggiore di qualsiasi quantità assegnata. Questa distinzione può apparire puntigliosa, in quanto le due affermazioni sono equivalenti dal punto di vista della matematica classica, eppure il primo enunciato non è accettato dai matematici costruttivi, mentre il secondo sì. Allo stesso modo, le dimostrazioni per assurdo dell'infinità dei numeri primi che incominciano assumendo che esista solo un numero limitato di numeri primi sono ammissibili solo nella matematica classica, mentre non lo nella matematica costruttiva[31].

La diversità di approcci ai problemi matematici non è però un difetto, in quanto ciascun metodo può mettere in luce proprietà differenti dei problemi e delle loro soluzioni. Un'opinione analoga era sostenuta anche da Poincaré 1905, che valorizzava la complementarietà degli approcci logico-deduttivo e intuitivo all'invenzione matematica:

> *the two sorts of minds are equally necessary for the progress of science; both the logicians and the intuitionalists have achieved great things that others could not have done.*

### 3.2.1 Un problema, molte risposte

Siccome i problemi matematici possono essere affrontati con approcci diversi, anche incompatibili tra loro, è possibile che alcuni di essi abbiano più risposte, non necessariamente equivalenti.

Già alcuni problemi che riguardano le operazioni tra numeri reali, le equazioni e le proprietà elementari delle funzioni possono non ammettere soluzioni o ammetterne infinite. Un esempio consiste nelle *equazioni lineari*[32], che possono avere una soluzione, infinite soluzioni o nessuna soluzione. Per questo problema è però possibile determinare in modo univoco la struttura geometrica delle eventuali soluzioni utilizzando il teorema di Rouché-Capelli. Di conseguenza, il problema si può ritenere univocamente risolto in funzione dei dati iniziali[33].

---

di questi problemi, l'*equazione di Burgers*, la descrizione della dissipazione dell'energia delle soluzioni che si ottiene utilizzando un modello non standard fornisce più informazioni rispetto a quella ottenuta con gli approcci classici.

[31] Un discorso analogo, ma più complesso, si ritrova nell'interpretazione dei lavori di Fermat, Leibniz, Eulero, Cauchy sull'analisi infinitesimale. Secondo una interpretazione, i procedimenti di questi matematici non sono altro che dei primi rudimentali tentativi di analisi nel senso moderno del termine. Altri autori però sostengono che l'analisi moderna non sia adeguata a descrivere i metodi di questi matematici, che invece sarebbero dei precursori della moderna analisi non standard (Bascelli et al. 2014).

[32] In due variabili questo problema consiste nel determinare le coppie di numeri $(x, y)$ che, al variare di $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, verificano simultaneamente le uguaglianze

$$\begin{cases} ax + by &= c \\ dx + ey &= f. \end{cases}$$

[33] Che in questo caso sono i parametri reali $a, b, c, d, e, f$.

Una situazione più complessa si ritrova nello studio di quella parte della teoria dei giochi che si occupa di dividere un compenso tra i membri di un gruppo. In questo caso è possibile determinare un insieme di soluzioni accettabili da parte di ciascun membro, ma non esiste una definizione condivisa di soluzione ottimale. Ciascuna proposta invece privilegia alcuni aspetti del contributo dei singoli individui a scapito di altri: per questo, ogni scelta del metodo di ripartizione non può essere neutra (Lemaire 2006; Shapley, Roth et al. 1988; Suijs 2000).

Nello studio di particolari tipi di equazioni[34] che vengono utilizzate per la descrizione di fenomeni fisici come la diffusione di individui o di calore, le deformazioni meccaniche o i movimenti dei fluidi, è possibile che alcuni problemi non ammettano soluzioni regolari, chiamate *classiche*. In questo caso è usuale riformulare il problema in modo che sia possibile ottenere anche delle soluzioni meno regolari, chiamate *deboli*. In alcuni casi semplici, un'equazione che non ammette soluzioni classiche può ammettere un'unica soluzione debole: in tal caso, il problema può considerarsi risolto. Per altri casi, invece, un'equazione che non ammette soluzioni classiche può ammettere più di una soluzione debole: di conseguenza,è necessario determinare quali proprietà si possano rilassare o imporre per ottenere esistenza e unicità di una soluzione. Siccome in generale non esiste un unico criterio per scegliere queste proprietà[35], è possibile che uno stesso problema abbia diverse definizioni di soluzione, non sempre compatibili tra loro (Demoulini 1996; Slemrod 1991).

Un altro problema che soffre di una difficoltà analoga è quello di dare un ordinamento lineare a un insieme di candidati a partire dalle preferenze dei singoli individui, come per esempio nelle procedure di voto. Già nel XIX secolo con le analisi di Borda 1784 e Condorcet 1785a; Condorcet 1785b è stato scoperto che i metodi per esprimere preferenze non sempre portano a una decisione univoca e, per di più, sono manipolabili. Inoltre, come mostrato dal teorema di Arrow, questi limiti sembrano intrinseci alle procedure di voto che rispettano alcuni principi apparentemente ragionevoli[36] (Kelly 1988). A oggi non ci sono adeguate proposte che permettano di superare questo risultato negativo, magari sacrificando qualche aspetto secondario delle procedure di voto[37]. In questo caso, i limiti di una teoria matematica e l'assenza di una buona soluzione al problema delle scelte collettive potrebbero avere delle conseguenze significative anche sulla vita politica.

All'estremo dello spettro si trovano dei problemi, spesso legati alla struttura insiemistica dei numeri naturali[38], la cui soluzione è ancora più problematica. Secondo la concezione platonista, infatti, ciascuna di queste domande dovrebbe avere un'uni-

[34]Le *equazioni alle derivate parziali non lineari*.

[35]Solo in alcune aree di studio ci sono dei vincoli che si potrebbero considerare canonici, come le *inuguaglianze di entropia* nello studio delle leggi di conservazione (Bressan 2013; L. Evans 2004).

[36]Che si possono descrivere come: l'ordinabilità delle preferenze individuali, l'assenza di vincoli sul risultato finale, l'assenza di un dittatore, l'ottimalità della scelta e l'indipendenza dalle opzioni irrilevanti.

[37]È possibile muovere critiche alla maggioranza dei principi che risultano incompatibili per il teorema di Arrow. Per esempio, il principio dell'indipendenza dalle opzioni irrilevanti non tiene in considerazione che gli agenti hanno delle capacità di analisi limitate, quindi effettivamente agiungere opzioni irrilevanti che vanno comunque valutate potrebbe influenzare la loro scelta (Morreau 2016).

[38]Come l'*ipotesi del continuo*, formulata da Cantor, secondo la quale non esistono insiemi di cardinalità intermedia tra l'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei suoi sottoinsiemi.

ca risposta ben definita e indipendente dalle decisioni dei matematici: i sottoinsiemi dei numeri naturali esistono a priori e, per il principio del terzo escluso, le loro proprietà dovrebbero essere univocamente determinate. In realtà, grazie ai contributi di Gödel, Cohen e di altri ricercatori, oggi è noto che per ciascuna di queste proprietà esiste una teoria degli insiemi nella quale la proprietà stessa è vera, ma anche una nella quale è falsa. Inoltre, in modo simile a quanto è accaduto per le geometrie nel XIX secolo, i matematici non si domandano quale delle teorie alternative rispecchi le reali proprietà dei numeri naturali, ma ammettono che entrambe le soluzioni siano ugualmente accettabili. Questi problemi non riguardano solo ambiti della matematica teorica: alcuni di essi influenzano in modo sostanziale la possibilità di realizzare modelli matematici di fenomeni fisici[39]

### 3.2.2 Un esempio: l'evoluzione del concetto di *numero naturale*

L'evoluzione storica del concetto di numero naturale costituisce un esempio del passaggio da una concezione platonista a una concezione pluralista della matematica.

I numeri naturali sono tra i primi concetti matematici emersi in varie culture. Non ci sono documenti che permettono di sapere con certezza come i numeri siano stati introdotti, ma diversi storici della matematica concordano nel supporre che essi siano stati creati nell'ambito del commercio, dapprima per raffigurare e poi per sostituire i primi oggetti concreti che venivano utilizzati per misurare le quantità. Nelle civiltà sumera, egizia e babilonese, i numeri erano usati come strumento di calcolo al servizio dell'amministrazione pubblica e della religione (Boyer e Merzbach 2011; Ebbinghaus et al. 1995). Nei documenti matematici di queste civiltà non si trova una riflessione sul concetto di numero, che in Occidente compare per la prima volta in Grecia, con la scuola di Piragora. L'idea di numero della cultura greca ci è stata tramandata negli *Elementi*, nei quali si può leggere la seguente definizione:

E1. *Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno.*

E2. *Numero è una pluralità composta da unità.*

La definizione di numero data da Euclide ha influenzato tutta la storia del pensiero occidentale ed è stata tramandata pressoché invariata fino al XIX secolo. A titolo di esempio, Newton nell'*Arithmetica Universalis* propone la seguente definizione:

> *Intendiamo con numero non tanto una moltitudine di unità, quanto il rapporto astratto di una quantità qualsiasi con un'altra dello stesso genere che viene presa per unità* (Newton 1732).

Anche nella prima metà dell'Ottocento, quando ormai si sapeva come definire i numeri interi, razionali, reali e complessi a partire dai naturali, questi ultimi rimanevano un oggetto fondamentale del quale non si sapeva dare una definizione formale. Questa difficoltà è espressa in modo molto suggestivo da Leopold Kronecker, che verso la fine dell'Ottocento affermava

[39] Per esempio, quelli basati sulle equazioni alle derivate parziali.

*Dio creò i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo.*

Questa difficoltà nel definire i numeri naturali è stata superata pochi anni dopo con i lavori di Cantor, Frege e Dedekind, che hanno preparato il terreno per l'impostazione assiomatica del matematico torinese Giuseppe Peano. Secondo Peano, e secondo la maggior parte dei matematici formalisti, un numero naturale è qualsiasi oggetto matematico che soddisfa i seguenti assiomi:

P1. 0 è un numero;

P2. il successore di un numero è un numero;

P3. numeri diversi hanno successori diversi;

P4. 0 non è il successore di alcun numero.

Lo "0" di cui si parla negli assiomi non è definito in modo esplicito: può essere qualsiasi entità matematica che soddisfa gli assiomi P1. e P4. Allo stesso modo, la funzione "successore" che compare negli assiomi P2., P3. e P4. è una funzione la cui relazione con i numeri è governata dagli assiomi stessi. Questi sono due esempi di *definizione implicita* nel senso della matematica moderna. Per la maggior parte dei matematici moderni, gli assiomi di Peano definiscono i numeri naturali in modo adeguato.

A partire dallo 0 e dalla funzione successore si possono definire le usuali operazioni di addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza; la sottrazione si può definire sia come operazione inversa dell'addizione, sia mediante la costruzione dei numeri interi a partire dai naturali; in modo analogo la divisione si può definire sia come operazione inversa del prodotto, sia mediante la costruzione dei numeri razionali a partire dagli interi[40]. In questo modo, a partire dagli assiomi di Peano è possibile costruire tutti gli insiemi numerici che vengono utilizzati comunemente.

Questi assiomi si possono concepire come una descrizione accurata dei numeri naturali in senso classico, oppure come un sistema formale secondo la concezione di David Hilbert. Secondo quest'ultima scuola di pensiero, i "numeri" che compaiono negli assiomi di Peano non descrivono i numeri naturali dell'esperienza quotidiana o del mondo platonico, ma sono solamente entità astratte definite in modo implicito dagli assiomi. Inoltre, le parole "0", "numero" e "successore" possono essere sostituite da altre parole qualsiasi, come per esempio "Eva", "donna" e "figlia". Nonostante i matematici abbiano sempre la possibilità di assumere questa posizione formalista, diversi autori sostengono che, oltre alla concept definition dei numeri naturali, la maggior parte dei matematici ne ha anche una concept image che permette loro di interpretare i teoremi dell'aritmetica di Peano come proprietà vere dei numeri naturali (Hersh 1997b; Brown 2018).

In effetti, esiste un modello particolare dei numeri naturali, che in linguaggio tecnico si chiama *modello inteso* e si indica con il simbolo $\mathbb{N}$, che corrisponde all'idea intuitiva di numero posseduta anche dai non specialisti. In particolare, nel modello inteso i "numeri" degli assiomi di Peano indicano proprio i numeri naturali che

[40]Dal punto di vista storico, è stato prima introdotto l'insieme dei numeri razionali positivi, che

vengono insegnati a scuola fin dall'infanzia, mentre la funzione "successore" è la funzione che manda un numero $\star$ nel numero $\star + 1$. Inoltre, i numeri si possono ordinare come di consueto nella successione discreta riprodotta nella Figura 2.2, e godono delle usuali proprietà che intuitivamente si attribuiscono loro.

Oltre al modello inteso, gli assiomi di Peano ammettono anche altre interpretazioni; in altre parole, oltre ai numeri naturali di $\mathbb{N}$ ci sono anche degli altri oggetti matematici che soddisfano gli assiomi di Peano, e quindi possono ambire al titolo di "numeri naturali". Questi modelli, che vengono chiamati *non standard*, non sono solo delle curiosità matematiche, ma forniscono degli strumenti in più per affrontare alcuni problemi di matematica discreta (Di Nasso 2015; Di Nasso, Goldbring e Lupini 2018).

Altri matematici invece preferiscono non usare né il modello inteso né i modelli non standard dei numeri naturali: Edward Nelson, per esempio, è convinto che i numeri naturali che soddisfano gli assiomi di Peano siano in un certo senso *troppi*, e che per una pratica matematica significativa sia necessario utilizzare una famiglia più piccola di numeri (Nelson 2011). Una proposta analoga è stata avanzata da Sazonov 1995, che suggerisce l'utilizzo di quelli che chiama *feasible numbers*, cioè di famiglie di numeri che soddisfano gli ulteriori assiomi

F1. 0 è feasible;

F2. il successore di un numero feasible è feasible;

F3. $2^{1000}$ non è feasible.

Questi assiomi, se interpretati nella usuale teoria degli insiemi, sono incompatibili. Per definire in modo coerente i numeri feasible è necessario utilizzare delle collezioni di oggetti diverse, come per esempio gli insiemi *fuzzy*, nei quali il valore di verità della proposizione "$x$ è feasible" non assume solo i valori 0 e 1, cioè *falso* e *vero*, bensì tutti i valori reali compresi tra essi. Con questa interpretazione, la proprietà "$x$ è feasible" è *sempre meno vera* man mano che $x$ si avvicina a $2^{1000}$ [41]. Da un certo punto di vista, i numeri feasible sono più vicini alla nostra esperienza quotidiana rispetto ai numeri naturali, in quanto tengono conto della difficoltà crescente di lavorare con numeri sempre più grandi.

Dalla parte opposta dello spettro ci sono i matematici che non solo accolgono gli assiomi di Peano e i modelli non standard dei numeri naturali, ma che sentono il desiderio di aggiungere ancora più numeri alla loro pratica quotidiana. L'esempio più estremo è dato dal *Campo di numeri surreali*[42] introdotto da John H. Conway nel 1976 (Ebbinghaus et al. 1995; Conway 1976; Knuth 1974). I numeri surreali sono talmente abbondanti da contenere ogni estensione dei numeri reali con buone proprietà matematiche; allo stesso modo, la versione surreale dei numeri naturali estende $\mathbb{N}$ e tutti i suoi modelli non standard (Ehrlich 2012).

---

solo dopo l'accettazione dei numeri negativi è stato completato al campo dei numeri razionali.

[41] Per esempio, il valore di "$x$ è feasible" può essere definito come $1 - \frac{x}{2^{1000}}$. Questa funzione però non esprime l'idea implicita che i numeri piccoli siano *più feasible* di quelli grandi.

[42] L'iniziale maiuscola della parola "Campo" indica che i numeri surreali non formano un insieme come quello dei numeri naturali o dei numeri reali, ma una collezione più ampia chiamata *classe*.

Esistono quindi molti modi di concepire i numeri naturali; alcuni anche molto lontani dal modello inteso. Se da un lato la nostra esperienza quotidiana e la nostra cultura sembrano propendere per quest'ultimo, le sue variazioni sono comunque accettabili nella pratica matematica contemporanea.

## 3.3 La matematica è una delle discipline ragionevoli

Nel corso della storia il pensiero logico-deduttivo tipico della matematica è stato ritenuto come il modello di razionalità al quale ispirarsi anche in altre discipline. Inoltre, le ricerche che partono dall'assunzione che la razionalità umana a cui si deve aspirare è quella di tipo logico-deduttivo mettono in luce la distanza tra questo obiettivo ideale e i metodi di ragionare nella vita quotidiana (Stein 1996).

Eppure, nell'ambito delle scienze cognitive sono proposti anche modelli di razionalità alternativi a quello di tipo logico-deduttivo. Per esempio, Hugo Mercier e Dan Sperber hanno proposto che certe fallacie nel pensiero logico-deduttivo, come per esempio il confirmation bias, si possano interpretare meglio alla luce dell'ipotesi che la razionalità umana non abbia lo scopo di preservare il valore di verità delle proposizioni, quanto di giustificare le proprie scelte (Mercier e Sperber 2011). Anche i ragionamenti di tipo induttivo, come quelli proposti da Polya 1954a; Polya 1954b; Mazur 2014, sono forme di pensiero razionale non deduttivo. Il loro scopo non è quello di ottenere conoscenza certa, per esempio di stimolare la creatività o di orientare delle decisioni, come suggerito per esempio da Keith Frankish:

*Unlike Descartes, everyday reasoners are not seeking timeless certainties but timely solutions to particular problems, and their reasoning activities are shaped by practical goals as well as epistemic ones* (Gigerenzer et al. 2016).

Anche il ragionamento logico-deduttivo tipico della matematica non è unico né universalmente valido: la presenza di logiche alternative a quella aristotelica implica l'esistenza di diverse forme di ragionamenti, ciascuna con i propri ambiti di applicabilità e i propri limiti. Per esempio, è più conveniente usare logiche non classiche nelle situazioni in cui si presentano incertezze, quelle che riguardano ragionamenti sul futuro e sul passato, o in presenza di vincoli sulle risorse disponibili. Un esempio utilizzato nell'insegnamento delle logiche non classiche è il seguente: una persona desidera comprare una bevanda a un distributore automatico con un budget di 0.45 €. Se un tè costa 0.35 € e un caffè costa 0.40 €, è vera la proposizione $p$ definita da "è possibile comprare un tè" e la proposizione $q$ definita da "è possibile comprare un caffè". Secondo la logica classica, dovrebbe essere vera anche la congiunzione $p \wedge q$, cioè "è possibile comprare un tè ed è possibile comprare un caffè"; eppure l'acquisto di entrambe le bevande richiede un budget di 0.75 €, che è maggiore di quello a disposizione. Di conseguenza, la proposizione $p \wedge q$ ottenuta mediante le regole di deduzione della logica classica è falsa. Esiste invece una logica alternativa, chiamata *logica lineare*, grazie alla quale è possibile rappresentare questo tipo di ragionamenti. La differenza principale rispetto alla logica classica è che la logica lineare tiene conto di quali premesse sono già state usate nelle deduzioni e impedisce di usarle nuovamente se sono già state impegnate altrove. Altri esempi di situazioni che vengono rappresentate meglio mediante logiche non classiche sono discussi da Braüner 1996; Girard 1987; Schechter 2005.

### 3.3.1 Il problema della certezza

Alcuni autori propongono non solo che la matematica sia una delle molte discipline ragionevoli, ma che le verità matematiche non siano oggettive e assolute come nella concezione classica. Queste critiche non derivano da considerazioni legate ai teoremi di incompletezza di Gödel, che già da soli implicano l'impossibilità di dimostrare con le conoscenze odierne che la teoria degli insiemi, quella dell'aritmetica di Peano e la geometria euclidea siano libere da errori (Berto 2011; Nagel e Newman 2012; Van Dalen 2004).

Anche prescindendo dai teoremi di Gödel, è possibile sostenere che la conoscenza matematica non si può ritenere assolutamente certa per la natura stessa del procedimento logico-deduttivo (Berts 2016; Brown 2018; Ernest 2016; Hersh 1997b; Lakatos 1976). Infatti, per evitare un regresso all'infinito, il procedimento logico-deduttivo deve appoggiarsi ad alcuni assiomi, che vengono assunti senza alcuna giustificazione formale. Per esempio, il postulato di Euclide secondo il quale è possibile estendere indefinitamente ogni segmento è assunto come vero non in virtù di una deduzione logica, ma in base a degli altri principi, come un appello all'evidenza o all'estensione all'infinito di processi finiti[43].

Brown 2018 suggerisce tre possibili motivi per la scelta di particolari assiomi: questi risultano intuitivi o evidenti; permettono di sviluppare una teoria con un buon potere espressivo; oppure la loro scelta è completamente lasciata all'arbitrio dei ricercatori, come le regole di un gioco.

La prima di queste motivazioni può apparire attraente per i sostenitori della concezione classica della matematica, ma nella storia della disciplina ha portato a diversi momenti di crisi: la stessa assiomatica della geometria proposta da Euclide, che si è ispirato alle proprietà sensibili dello spazio, si è dimostrata insufficiente per la matematica del XIX secolo. Le assiomatizzazioni moderne della geometria euclidea sono molto più complesse di quella proposta dal matematico greco e includono assiomi, come quello di completezza, la cui evidenza può essere messa in discussione anche all'interno della matematica stessa. Un'altra disciplina dagli assiomi apparentemente intuitivi, la teoria degli insiemi nella formulazione di Cantor, si è rivelata contraddittoria, e gli assiomi delle formulazioni successive presentano delle restrizioni al concetto di insieme le cui motivazioni appaiono chiare solo dopo un'attenta analisi. Inoltre, ancora oggi c'è molto dibattito tra matematici e filosofi della matematica sulla completezza[44] della teoria degli insiemi nella sua formulazione di Zermelo e Fraenkel: è ragionevole limitarsi a usare gli assiomi della formulazione originale dei due matematici tedeschi, oppure è preferibile ampliarla con nuovi assiomi? E, in caso di risposta affermativa, quali tra i vari possibili assiomi, spesso

[43]L'idea che l'infinito abbia le stesse proprietà del finito si ritrova anche oggi in alcuni ambiti della matematica, ma non sempre corretta. Per esempio, nella teoria degli insiemi il concetto di *numero di elementi* ha delle proprietà molto diverse per gli insiemi finiti e per gli insiemi infiniti.

[44]Intesa qui in senso informale e non nel senso della completezza di un sistema logico.

mutuamente esclusivi, vanno aggiunti alla teoria?

Anche il secondo criterio di scelta degli assiomi, cioè la selezione di quei principi di base che permettono di sviluppare una teoria dal potere espressivo sufficiente ad affrontare i problemi della disciplina, è soggetto alle stesse critiche. Un esempio tratto dalla matematica contemporanea è quello degli assiomi di Peano per l'aritmetica: a partire da questi, i matematici sono in grado di dimostrare una grande quantità di teoremi corretti sui numeri naturali. Il giudizio di correttezza però presuppone una concept image dei numeri naturali che è confermata, o almeno non contraddetta, dalla teoria: di conseguenza, non è possibile escludere che un cambiamento di questa concept image possa rendere inadeguati quegli stessi assiomi che oggi vengono accettati. Viceversa, una eventuale contraddizione nell'aritmetica di Peano dovrebbe portare sia alla revisione degli assiomi in uso, sia alla concept image dei numeri naturali.

Brown e Ernest concordano che una possibile difesa di una di queste due posizioni può consistere nell'abbandonare il platonismo in favore del formalismo, cioè la concezione che la matematica sia solo una manipolazione simbolica che avviene secondo alcune regole fissate a priori, come avviene in un gioco. Di conseguenza, un teorema dell'aritmetica non è concepito più come l'affermazione di proprietà vere dei numeri naturali, ma diventa solo un enunciato che riguarda il sistema assiomatico di Peano. Eppure, con le parole di Brown,

> *is anyone really agnostic about* $2+3=5$*, and willing only to give assent to* $PA \vdash 2+3=5$*?*

La terza possibilità, cioè di scegliere delle regole arbitrarie dalle conseguenze inusuali, è alla base di alcuni ambiti di ricerca di nicchia, come la *dismal arithmetic* (Applegate, LeBrun e Sloane 2011; Sloane 2018).

Quindi già solamente a livello della scelta degli assiomi l'idea che la matematica sia la disciplina della certezza può essere messa in discussione. Secondo Brown e Lakatos, però, neppure le dimostrazioni corrette portano alla certezza assoluta, anche sotto l'ipotesi che gli assiomi siano inattaccabili. Come è stato mostrato nella Sezione 2.3, infatti, una dimostrazione corretta può diventare inadeguata in seguito a un'analisi più sofisticata o all'affinamento delle definizioni degli oggetti matematici che compaiono in essa[45]. Per quanto oggi le definizioni degli oggetti matematici siano relativamente stabili, non è possibile avere la certezza che non vengano mai più modificate: di conseguenza, anche le dimostrazioni che oggi sono ritenute corrette potrebbero risultare inadeguate per i criteri della matematica dei prossimi secoli.

Questo non significa che le dimostrazioni odierne siano inaffidabili o difettose. Brown offre uno slogan, ispirato dal matematico britannico Gowers, secondo il quale una dimostrazione è composta da una spiegazione e da una garanzia. Invece di intendere la garanzia come *garanzia di certezza*, Brown propone di interpretare questo termine come garanzia che, se la dimostrazione si rivelasse non corretta

[45]Questo è successo per esempio al primo criterio di congruenza tra i triangoli, ritenuto un teorema dai matematici greci e un assioma da quelli moderni. Un caso analogo è avvenuto al concetto di funzione, la cui evoluzione nella storia ha portato un'affermazione come *ogni funzione è continua* da essere vera a falsa.

*we can (eventually) fix it, or replace it, or withdraw it.*

L'analisi di Brown è in linea con la descrizione del consolidamento dei risultati matematici mediante dimostrazioni e controesempi proposta da Lakatos 1976. Ernest 2016 ha commentato in modo suggestivo come questo modo di procedere sia connaturato alla pratica matematica fin dall'antichità:

> *Uncertainty arising within mathematics or in areas of thought and application outside of mathematics are colonised and appropriated within mathematics. [...] Mathematics has been defusing uncertainty by colonising it since its beginnings.*

Per Ernest, quindi, la dinamica della revisione della conoscenza matematica sulla base di esempi e controesempi non è solo un modo per consolidare i risultati in una forma condivisa dalla comunità degli scienziati, ma è uno dei metodi con cui viene alimentata la narrativa dell'infallibilità della matematica.

### 3.3.2 Il ruolo del rigore

> Mathematics is not a careful march down a well-cleared highway, but a journey into a strange wilderness, where the explorers often get lost. Rigour should be a signal to the historian that the maps have been made, and the real explorers have gone elsewhere.
>
> *W. S. Anglin*

Durante l'invenzione matematica il rigore serve per accostarsi ai risultati preliminari che riguardano il problema indagato nella fase iniziale di preparazione e, nella fase finale di sistematizzazione, per aiutare la verifica delle intuizioni e la comunicazione degli eventuali risultati ottenuti. In quest'ultimo momento dell'invenzione matematica, gli autori sono implicitamente incoraggiati ad assumere la terminologia e le convenzioni linguistiche condivise dagli esperti del settore al quale si rivolgono. Di conseguenza, il rigore necessario per comunicare un risultato cambia a seconda che si desideri comunicarlo a una rivista scientifica, a una conferenza o in una comunicazione privata. Le consuetudini di ciascuna di queste comunità scientifiche non sono rimaste costanti nel tempo, e con esse è cambiata anche l'idea di rigore (Kleiner 1991).

Oggi, per la maggior parte delle comunicazioni tra esperti è sufficiente presentare le scoperte in modo ordinato e consequenziale, scrivendo le dimostrazioni e i ragionamenti in un misto di linguaggio naturale e linguaggio simbolico che agevoli quanto più possibile la lettura e la comprensione. I matematici vicini alla posizione formalista insistono nel sostenere che, almeno in linea di principio, una buona dimostrazione dovrebbe essere traducibile in termini formali in qualche sistema di deduzione, ma di fatto questa posizione influenza raramente la pratica matematica (Hersh 1993; Hersh 1997b; Rota 1997). L'uso del linguaggio formale è limitato al minimo indispensabile anche in quei settori di ricerca al confine tra la matematica e l'informatica che si occupano della codifica delle dimostrazioni in linguaggi formali e dell'automazione delle dimostrazioni (Robinson e Voronkov 2001).

Il rigore non va poi confuso con uno specifico formalismo: esistono infatti molti modi per esprimere gli stessi risultati in modo ritenuto adeguato. Un discorso analogo vale per le dimostrazioni: ne esistono diversi tipi, alcuni dei quali a prima vista possono apparire non rigorosi, ma che appartengono a una tradizione codificata e che oggi sono accettati come corretti. Alcuni esempi sono le dimostrazioni di caccia al diagramma in algebra omologica, di cui un esempio è presentato in Figura 3.1, alcuni tipi di dimostrazioni per immagini (Chakraborty 2018; Larson 1985), fino alle variazioni sul tema di *la dimostrazione è lasciata al lettore interessato* per alcuni passaggi che oggi sono considerate di semplice routine[46].

$$\begin{tikzcd}
 & \ker f \arrow[r] \arrow[d] & \ker g \arrow[r] \arrow[d] & \ker h \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners, to path={-- ([xshift=8em]\tikztostart.east) |- node[near start, right]{$\partial$} ([yshift=-3ex]\tikztostart.south |- \tikztotarget.north) -| ([xshift=-6em]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}] & \\
 & A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
 & \operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker} g \arrow[r] & \operatorname{coker} h &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Il *lemma del serpente*. Per un lettore esperto in algebra omologica, l'immagine riassume l'enunciato e la dimostrazione del teorema.

Nelle dimostrazioni moderne non è quindi richiesta tanto una padronanza di un qualche sistema formale di deduzione, quanto la capacità di esporre i ragionamenti in modo da renderli comprensibili ai destinatari intesi.

I valori odierni di chiarezza espositiva non sono stati sempre condivisi dalla comunità degli scienziati, come ricordato nella Sezione 2.3.1. Inoltre, la richiesta di enunciare i risultati in versi di endecasillabi esige un rigore formale molto superiore rispetto al linguaggio con cui sono stati scritti gli *Elementi* o con cui sono scritti gli odierni articoli di ricerca: non sempre il rigore ha avuto lo scopo di agevolare la comunicazione. Anche oggi una dimostrazione scritta con una simbologia non familiare al suo pubblico o in un sistema deduttivo formale renderebbe più oscuro il contenuto degli enunciati e il significato della loro dimostrazione (Hersh 1993; Hersh 1997b).

Uno dei matematici che fornisce un controesempio all'idea che il rigore sia indispensabile nella pratica matematica è stato Évariste Galois. Secondo il giudizio

[46]Un esempio tipico è la verifica che un oggetto matematico definito per mezzo di classi di

unanime dei suoi insegnanti e dei matematici che hanno letto i suoi manoscritti, Galois non era in grado di comunicare in modo efficace o rigoroso i suoi risultati; le sue difficoltà nell'esposizione hanno probabilmente contribuito a ritardare di oltre dieci anni la pubblicazione dei suoi articoli. La sua incapacità nelle relazioni potrebbe addirittura averlo portato alla depressione e, ultimamente, alla morte, avvenuta a soli vent'anni[47]. La mancanza di rigore e di chiarezza di Galois non ha avuto però alcun effetto sulla validità dei suoi risultati e sulla portata rivoluzionaria delle sue idee matematiche: ancora oggi Galois è riconosciuto come uno dei padri della teoria dei gruppi, e un'intera branca della matematica porta il suo nome.

equivalenza non dipenda dal rappresentante della classe utilizzato nella definizione.

[47]Secondo alcuni storici della matematica, Galois si sarebbe suicidato organizzando un duello a scopi politici, ma sulla morte del giovane matematico sono stati dati resoconti contrastanti (Boyer e Merzbach 2011; Rigatelli 2012; Rothman 1982).

# Capitolo 4

# Applicazioni alla comunicazione

Elves seldom give unguarded advice, for advice is a dangerous gift, even from the wise to the wise, and all courses may run ill.

*J.R.R. Tolkien, The Lord of the Rings*

Le concezioni della matematica presentate nel Capitolo 1 e nel Capitolo 3 influenzano il modo di comunicare la matematica sia nella divulgazione sia nella didattica. L'approccio alla comunicazione dei platonisti è descritto con un'affascinante metafora da Hardy 1940:

*When [a mathematician] sees a peak, he believes that it is there simply because he sees it. If he wishes someone else to see it, he points to it, either directly or through the chain of summits which led him to recognize it himself.*

Analogamente, nelle pratiche didattiche che danno importanza alla precisione nella manipolazione simbolica si può ritrovare l'idea classica di argomentazione corretta, poi maturata nella concezione di dimostrazione secondo la scuola formalista.

Invece, i matematici che concepiscono la pratica matematica non come universale, ma come un prodotto culturale, sembrano più aperti a una molteplicità di pratiche nella comunicazione e didattica (d'Ambrosio 1985; A. B. Powell e Frankenstein 1997) e attribuiscono un valore diverso alla padronanza dei simboli e del rigore (Devlin 2011; Hersh 1993; Hersh 1997b; Rota 1997; Sfard 2016).

Al di là della posizione di ciascun divulgatore o docente, la comunicazione e la didattica della matematica sono oggetto di studio e discussione, soprattutto a causa della loro importanza nella società occidentale contemporanea e delle difficoltà che sembrano riguardare la sua trasmissione.

## 4.1 Alcune difficoltà

La matematica, come altre discipline tecniche, presenta delle modalità di comunicazione all'apparenza diverse da quelle che vigono nella comunicazione quotidiana. Per esempio, nelle interazioni non tecniche Grice 1967 suggerisce che viga il seguente principio di cooperazione:

*make your conversational contribution such as is required, at the stage at which it occurs, by the accepted purpose or direction of the talk exchange in which you are engaged.*

Questo principio presuppone che la comunicazione sia concepita, con le parole di Ferrari 1999, come

*a cooperative work whose participants recognize a common goal or a mutually shared perspective.*

Senza una dimestichezza con il funzionamento della comunità matematica, alcune sue pratiche possono non essere riconosciute come finalizzate al il conseguimento di uno scopo comune; di conseguenza, possono dare luogo a difficoltà di comunicazione.

Secondo Ferrari 1999, Hersh 1997a e Jamison 2000, una prima difficoltà consiste nell'uso del linguaggio tecnico della matematica, che è molto artificiale, contiene molti simboli il cui significato deve essere decodificato e ricordato, e include parole di uso quotidiano utilizzate in modo non convenzionale, talvolta con un significato lontano dall'intuizione che lo ha generato[48]. Ferrari propone il seguente esempio: l'affermazione corretta $2 \leq 100$ sembra violare il principio di cooperazione perché è ridondante, in quanto è vera anche l'informazione più precisa $2 < 100$. Per di più, la sua lettura nel linguaggio naturale è *due è minore o uguale a cento*, intuita come falsa perché due non può essere uguale a cento. Di conseguenza, alcuni studenti potrebbero affermare che solo $2 < 100$ è vera, mentre $2 \leq 100$ è falsa.

Nella comunità scientifica c'è una seconda dinamica che può essere di difficile comprensione per i non esperti: come descritto da Lakatos 1976, per verificare la correttezza di un teorema spesso i matematici cercano di confutarlo per mezzo di controesempi, che spesso sono casi limite della teoria sotto esame. Quindi la dinamica di caccia all'errore è un momento accettato della comunicazione nella comunità scientifica, ma può essere fraintesa. Secondo alcuni autori, infatti l'enfasi posta sulla ricerca dell'errore può contribuire ad associare emozioni negative alla disciplina, sia negli studenti, sia negli adulti e negli insegnanti(Beilock et al. 2010; J. Evans 2002; Hannula 2002; Zan 2007).

## 4.2 Spunti di comunicazione della matematica

Tenendo presente le difficoltà di base nella comunicazione della matematica discusse nella sezione precedente, dall'analisi delle dinamiche dell'invenzione matematica possono emergere alcuni spunti di comunicazione della matematica.

### 4.2.1 Divulgazione mediante problemi

Alla base dell'invenzione matematica diversi autori ritengono che vi sia un problema da risolvere, la curiosità di indagare un fenomeno, o il piacere della ricerca come

[48] Un esempio può essere il termine *funzione*, che oggi è utilizzato in modo molto diverso sia rispetto alla sua accezione nel linguaggio comune, ma anche rispetto al suo significato nella matematica del XVII secolo.

attività della mente. Una delle indicazioni più comuni nella comunicazione e nella didattica consiste proprio nel proporre problemi ed esempi che incuriosiscano il pubblico o che sostengano la motivazione nello studio.

Ci sono numerosi esempi di divulgazione basati su questa idea. Uno di essi è il libro *That's Maths: The Mathematical Magic in Everyday Life*, del professor Peter Lynch (Lynch 2016), che raccoglie brevi articoli sulle applicazioni della matematica agli ambiti più svariati: dalla meteorologia alle TAC, passando per la pianificazione delle metropolitane e per i test delle prime bombe atomiche. Il libro è ispirato ai contributi dell'autore alle pagine scientifiche del giornale Irish Times, e ha anche una controparte digitale, il blog (Lynch 2013-2018).

Anche il fumettista americano Randall Munroe, laureato in fisica ed ex-collaboratore della NASA, ha dedicato una sezione del suo sito `xkcd.com` all'analisi di problemi, talvolta surreali, proposti dai suoi lettori, tra cui *quante lucciole ci vorrebbero per uguagliare la lucentezza del sole?* o *qual è la potenza in watt che Yoda può raggiungere usando la Forza?* (Munroe 2005-2018). Le risposte a ciascuna domanda sono spesso formulate con tecniche sofisticate di matematica applicata alla fisica e all'ingegneria. La motivazione nel seguire queste analisi è data dalla loro curiosità e dallo stile umoristico con cui Munroe le affronta, ma anche dal coinvolgimento diretto dei lettori.

Questi brevi articoli, oltre a fornire una risposta a chi si domanda quale sia l'utilità della matematica, potrebbero avere anche uno scopo ulteriore, cioè preparare i lettori a una fase di indagine autonoma secondo tempi personali che non sono omogenei e non si possono stabilire a priori. La dinamica che si innesca può corrispondere ai momenti iniziali dell'invenzione matematica, che incomincia con uno spunto o una curiosità e prosegue con un'indagine più sistematica.

### 4.2.2 Il piacere della matematica

Alcuni comunicatori cercano di motivare la ricerca matematica non tanto spiegando come i suoi risultati siano attuali e spendibili nel mondo contemporaneo, ma puntando soprattutto sul piacere provato nel suo studio[49]. Un matematico che ha adottato questa strategia di comunicazione è Cedric Villani, medaglia Fields del 2010 e direttore dell'istituto Henri Poincaré di Parigi. In un seminario TED del 2016 Villani ha sostenuto che la matematica dà un piacere dall'intensità paragonabile a quello provato durante i rapporti sessuali, con l'unica differenza che il piacere della pratica matematica non è così limitato nel tempo (Villani 2016). Il matematico spagnolo Eduardo Sáenz de Cabezón, invece, in un seminario analogo ha proposto l'idea di regalare un teorema alla persona amata, perché i diamanti possono durare millenni, ma *solo un teorema è davvero per sempre*[50] (Cabezón 2014).

Quelli appena presentati sono lucidi tentativi di collegare i processi cognitivi a quelli emozionali in modo positivo, nel tentativo di contrastare o quanto meno mettere in discussione le emozioni negative che vengono provate da diverse persone in difficoltà con la matematica: la noia, la paura di sbagliare, di non capire o di apparire inadeguati, la frustrazione o la rabbia di fronte al fallimento.

[49] Una proposta analoga è avanzata per la letteratura da Rondoni 2016.

[50] Sostenendo in questo modo la concezione classica della matematica.

Altri autori hanno provato a combattere la paura della matematica rendendola giocosa. Trasformando la matematica in gioco, infatti, le persone abbandonano almeno in parte il timore di sbagliare e si concedono maggior libertà nell'indagare i problemi. Invece di focalizzare la loro attenzione sul tentativo di esibire al primo colpo la risposta corretta, effettuano prove, formulano congetture, generalizzano e specializzano i problemi in modo da comprenderli meglio[51].

Uno dei più noti divulgatori di matematica ricreativa è stato Martin Gardner, che curò la colonna di matematica ricreativa *Mathematical Games* della rivista Scientific American, del gruppo Nature, dal 1957 al 1986. Oggi però la matematica ricreativa non è confinata alle riviste specializzate o ai saggi: per esempio il professor Tadashi Tokieda, oltre a dedicarsi alla ricerca in fisica matematica, è un appassionato creatore di oggetti curiosi che mostrano alcuni aspetti sorprendenti delle due discipline. Insieme al giornalista Brady Haran, che cura il progetto di divulgazione della matematica *Numberphile* (Haran 2011-2018), il professor Tokeida realizza dei video per YouTube nei quali mostra come costruire questi giocattoli matematici e ne svela il significato fisico (Tokieda 2016-2018).

Un altro professore di matematica che insegna la matematica anche attraverso i giochi è Keith Devlin. Invece di specializzarsi in rompicapo e puzzle oppure su giocattoli, Devlin ha scelto di utilizzare i videogiochi. La sua compagnia BrainQuake Inc. sviluppa infatti videogiochi per bambini dai cinque anni in su con lo scopo di aiutarli ad apprendere quello che chiama *mathematical thinking*. Per esempio, nel gioco *Wuzzit Trouble* gli utenti hanno l'obiettivo di liberare degli animaletti colorati risolvendo problemi aritmetici. Questi non sono però presentati con la usuale notazione matematica, ma per mezzo di ingranaggi e ruote dentate che si possono muovere liberamente, come mostrato in Figura 4.1. Con questa interfaccia i problemi


Figura 4.1: Uno screenshot del gioco *Wuzzit Trouble*.

vengono tradotti dall'usuale linguaggio algebrico a uno più immediato che permette di effettuare esperimenti e osservazioni dirette. Secondo Devlin 2011, questo tipo di rappresentazione riduce la *barriera simbolica* che ostacola l'apprendimento della matematica e ha benefici quantificabili sulle abilità matematiche degli alunni.

[51]In altre parole, li indagano secondo le tecniche descritte da Polya.

### 4.2.3 Il ruolo del rigore nella divulgazione e nella didattica

> Which means yet another grand cliché turns out to be true: your education really is the job of a lifetime.
>
> *David Foster Wallace, This is Water*

Come ricordato dal professor Devlin, una delle barriere d'accesso alla matematica consiste nel suo linguaggio simbolico (Devlin 2011; Ferrari 1999; Hersh 1997a; Jamison 2000; Zan 2007). Eppure, nel processo di invenzione matematica la padronanza simbolica è necessaria solo nel primo passo di preparazione e nel quarto passo di sistematizzazione, e solo nella misura in cui è funzionale all'acquisizione delle nozioni di base e alla comunicazione dei risultati dell'indagine. Per questo, alcuni autori suggeriscono che nella comunicazione e nella didattica non è sempre importante utilizzare un linguaggio tecnico o con molti simboli, in quanto la formazione dei concetti non è legata allo specifico linguaggio con cui questi sono espressi (Devlin 2011; Hadamard 1954; Sfard 2016; Zan 2007).

Inoltre, l'uso di rappresentazioni alternative come quella sviluppata da Devlin può aiutare a ridurre la barriera d'accesso ai contenuti matematici. Un altro esempio è stato proposto da Villani 2016, che invece di proporre un'analisi astratta del concetto di probabilità, ne ha fatto una dimostrazione concreta attraverso la macchina di Galton. Anche dal punto di vista didattico lo studio di modelli semplificati può costituire un primo passo significativo verso una successiva acquisizione di conoscenze più raffinate (Zan 2007).

Nel proporre una comunicazione e una didattica non focalizzata sulla padronanza del linguaggio simbolico occorre però ricordare che la matematica è uno dei criteri di selezione per l'accesso ad alcuni corsi di laurea e ad alcune professioni (Orlin 2018; Lockhart 2009). Di conseguenza, gli studenti e i lavoratori hanno bisogno non solo di una conoscenza intuitiva della disciplina e della capacità di effettuare ragionamenti informali, ma anche della padronanza simbolica necessaria per confrontarsi con le verifiche in classe, i test standardizzati del tipo OECD PISA, i test universitari o i test logici per la selezione del personale. È quindi necessario trovare un compromesso tra facilità di accesso e rigore.

Il rigore nella didattica assume un significato diverso rispetto a quello della logica formale: infatti viene spesso confuso con la padronanza di alcune specifiche tecniche risolutive e con la capacità di riprodurre correttamente calcoli e procedure (Hull, Balka e Miles 2013; Lockhart 2009). Questa concezione si sta però dimostrando inadeguata di fronte alle esigenze dei test standardizzati (Jamison 2000). Lo stesso OECD suggerisce che

> *memorization as a learning strategy may work with easy problems, but it is unlikely to be effective if it is the only strategy used when confronted with complex mathematics problems* (OECD 2016).

Al posto della concezione di rigore come aderenza a un insieme di regole e norme predefinite, si sta cercando di promuoverne una definizione alternativa, più adeguata alle nuove necessità dell'istruzione matematica. Una proposta alternativa di definizione di rigore in ambito didattico è stata avanzata per esempio da Carlson 2016:

*Rigor, Educational Definition - A condition that encourages creative problem solving in new, exciting contexts, yielding perseverance and satisfying growth in knowledge and skills. Synonyms: flexibility, progress, creativity, challenge, growth, inspiration.*

Questa definizione aspira ad avvicinare la didattica con la pratica dell'invenzione matematica: al suo interno si possono trovare dei riferimenti ai vari passi del processo di ricerca: il *problem solving* richiama alle motivazioni, la *perseveranza* ricorda che prima di giungere a una soluzione è necessario un lavoro tenace di preparazione, mentre *flessibilità*, *creatività* e *ispirazione* fanno riferimento a incubazione e illuminazione.

In quest'ottica, la finezza nella manipolazione simbolica e nel calcolo vanno coltivate nella misura in cui sostengono la capacità di affrontare problemi complessi, e non come fine ultimo dell'insegnamento. Un esempio di riconciliazione tra linguaggio simbolico e abilità matematiche che va in questa direzione è stato suggerito da Palisoc 2014. La sua proposta consiste nello sfruttare alcune regolarità nel nostro modo di contare e di eseguire le operazioni aritmetiche per preparare la strada alla manipolazione simbolica in un momento successivo dell'apprendimento. Questo è uno dei possibili modi per avvicinarsi all'obiettivo auspicato da Jamison 2000, cioè di passare da una manipolazione meccanica di simboli a una consapevolezza delle convenzioni linguistiche attualmente in uso nella pratica matematica.

Nella didattica è possibile rilevare non solo alcune strategie di insegnamento inefficaci, come la memorizzazione e la ripetizione di algoritmi predefiniti, ma anche il cambiamento di significato di alcuni concetti condivisi nella comunità scientifica. Un esempio riguarda simbolo di uguaglianza, che soprattutto nella scuola primaria corre il rischio di essere utilizzato come istruzione di manipolare dei segni che si trovano alla sua sinistra per produrre un risultato da scrivere alla sua destra. L'uguaglianza come istruzione di eseguire una manipolazione non è più simmetrica e riflessiva, e quindi perde il significato di relazione tra due parti[52]. In questi casi, alcune ricerche discusse da S. R. Powell 2012 suggeriscono che, per recuperare il significato relazionale del simbolo, può essere più utile affrontare compiti alternativi alla risoluzione delle espressioni, meglio se legati alla manipolazioni di oggetti in un contesto non formalizzato.

[52]Secondo Israel 2011, nelle scuole primarie finlandesi il simbolo di uguaglianza è stato eliminato a favore di una casella nella quale inserire il risultato di un calcolo o di un problema. D'altra parte, già alcuni anni prima alcuni matematici finlandesi lamentavano che, nonostante le buone performance nei test standardizzati, gli studenti finlandesi incontravano grandi difficoltà nell'affrontare la matematica universitaria (Astala et al. 2006). Un motivo di questa difficoltà può essere ricercato nell'enfasi dato a quella che Russo 2000 definisce la *matematica pratica*, cioè slegata da un impianto teorico adeguato.

# Capitolo 5

# Conclusioni

Nella cultura occidentale odierna coesistono due sguardi alternativi sulla matematica. Quello dalla tradizione più antica sostiene che la matematica sia l'unica forma di conoscenza universale, oggettiva e certa. Secondo il più recente, invece, esistono molte forme di matematica, ciascuna delle quali cambia nel tempo e dipende dalla società che l'ha generata: di conseguenza, anche le conoscenze matematiche un tempo ritenute certe possono rivelarsi non corrette ed essere quindi soggette a revisioni. Ciascuna di queste concezioni gioca un ruolo fondamentale nella comunicazione e nella didattica della matematica: da un lato determina almeno in parte il messaggio da comunicare, e dall'altro influisce nella scelta delle tecniche di comunicazione.

La comunicazione della matematica è però influenzata anche dalle dinamiche di ricerca descritte da Poincaré, Polya e Hadamard. Da un lato, dall'analisi del processo di invenzione e dagli strumenti cognitivi che esso richiede emergono alcuni spunti sulla comunicazione efficace della matematica; viceversa, diversi esempi di divulgazione e didattica sembrano far riferimento ai vari momenti dell'invenzione matematica.

Le interazioni tra creatività matematica e comunicazione sono più profonde di quanto la carrellata di esempi presentati nel Capitolo 4 lasci intuire. Questa tesi ha costituito un momento iniziale di indagine su questi argomenti, che ci proponiamo di approfondire sia nel corso di ulteriori studi, sia nelle prossime occasioni di comunicazione e didattica.

# Bibliografia


Applegate, David, LeBrun, Marc e Sloane, Neil (2011). “Dismal Arithmetic”. In: *Journal of Integer Sequences* 14.2, p. 3.

Ascher, Marcia (2018). *Mathematics elsewhere: An exploration of ideas across cultures.* Princeton University Press.

Balaguer, Mark (2001). *Platonism and anti-platonism in mathematics.* Oxford University Press on Demand.

Bascelli, Tiziana et al. (2014). “Fermat, Leibniz, Euler, and the gang: The true history of the concepts of limit and shadow”. In: *Notices of the AMS* 61.8, pp. 848–864.

Beilock, Sian L et al. (2010). “Female teachers’ math anxiety affects girls’ math achievement”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 107.5, pp. 1860–1863.

Benacerraf, Paul (1973). “Mathematical truth”. In: *The Journal of Philosophy* 70.19, pp. 661–679.

Benci, Vieri e Luperi Baglini, Lorenzo (2014). “Ultrafunctions and applications”. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S* . 7.4, pp. 593–616.

— (2017). “Generalized solutions in PDEs and the Burgers’ equation”. In: *Journal of Differential Equations* 263.10, pp. 6916–6952. ISSN: 0022-0396. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039617303893.

Berto, Francesco (2011). *There’s Something about Gödel: The Complete Guide to the Incompleteness Theorem.*

Berts, Kim-Erik (2016). *The Certainty of Mathematics - A Philosophical investigation.* Åbo Akademi University Press. ISBN: 978-951-765-843-0. URL: http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-765-843-0.

Bishop, Alan J. (mag. 1988). “Mathematics education in its cultural context”. In: *Educational Studies in Mathematics* 19.2, pp. 179–191. ISSN: 1573-0816. URL: https://doi.org/10.1007/BF00751231.

— (1990). “Western mathematics: the secret weapon of cultural imperialism”. In: *Race and Class* 32.2, pp. 51–65. URL: https://doi.org/10.1177/030639689003200204.

Blum, Norbert (2017b). “The mistake in “A Solution of the P versus NP Problem””. URL: http://theory.cs.uni-bonn.de/blum/PvsNP/mistake.pdf.

Borda, J de (1784). “A paper on elections by ballot”. In: pp. 122–129.

Bottazzi, Emanuele (2017). *Nonstandard Models in Measure Theory and in functional Analysis.* PhD thesis, University of Trento.

Boyer, Carl B e Merzbach, Uta C (2011). *A history of mathematics.* John Wiley e Sons.

Braüner, Torben (1996). *Introduction to linear logic.*

Bressan, Alberto (2013). “Hyperbolic Conservation Laws: An Illustrated Tutorial”. In: *Modelling and Optimisation of Flows on Networks: Cetraro, Italy 2009, Editors: Benedetto Piccoli, Michel Rascle.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 157–245. ISBN: 978-3-642-32160-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-32160-3_2.

Chakraborty, Bikash (2018). “A Visual Proof that $\pi^e < e^\pi$”. Preprint. URL: https://arxiv.org/abs/1806.03163v1.

Condorcet, Marquis de (1785a). “An essay on the application of probability theory to plurality decision making: An election between three candidates.” In: pp. 69–80.

— (1785b). “An essay on the application of probability theory to plurality decision making: Part five”. In: pp. 109–118.

Conway, John Horton (1976). *On numbers and games*. Ak Peters Series. A K Peters / CRC Press, p. 242. ISBN: 978-1568811277.

d’Ambrosio, Ubiratan (1985). “Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics”. In: *For the learning of Mathematics* 5.1, pp. 44–48.

De Villiers, Michael D. (1990). “The role and function of proof in mathematics”. In: *Pythagoras* 24, pp. 17–24.

Demoulini, S. (1996). “Young Measure Solutions for a Nonlinear Parabolic Equation of Forward-Backward Type”. In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 27.2, pp. 376–403. URL: https://doi.org/10.1137/S0036141094261847.

Devlin, Keith (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning*. A. K. Peters/CRC Press, New York. URL: https://web.stanford.edu/~kdevlin/Presentations/Symbol%20barrier.pdf.

Di Nasso, Mauro (2015). “Iterated hyper-extensions and an idempotent ultrafilter proof of Rado’s Theorem”. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 143, pp. 1749–1761.

Di Nasso, Mauro, Goldbring, Isaac e Lupini, Martino (2018). “Nonstandard Methods in Ramsey Theory and in Combinatorial Number Theory”. URL: https://www.aimath.org/~farmer/print/NSARTCNTbook-alltogether.pdf.

Du Bois-Reymond, Emil (1872). *Uber die Grenzen des Naturerkennens*. Veit & Comp.

Ebbinghaus, H.-D. et al. (1995). *Numbers*. Springer-Verlag. URL: http://www.maths.ed.ac.uk/~eaar/papers/numbers.

Ehrlich, Philip (2012). “The Absolute Arithmetic Continuum and the Unification of All Numbers Great and Small”. In: *Bulletin of Symbolic Logic* 18.1, pp. 1–45.

Ernest, Paul (1997). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. State University of New York Press.

— (2016). “The problem of certainty in mathematics”. In: *Educational Studies in Mathematics* 92.3, pp. 379–393.

— (2018). “The Ethics of Mathematics: Is Mathematics Harmful?” In: *The Philosophy of Mathematics Education Today*. A cura di Paul Ernest. Cham: Springer International Publishing, pp. 187–216. ISBN: 978-3-319-77760-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_12.

Evans, Jeff (2002). *Adults’ mathematical thinking and emotions: A study of numerate practice*. Routledge.

Evans, Lawrence (2004). “A survey of entropy methods for partial differential equations”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 41.4, pp. 409–438.

Ferrari, Pier Luigi (1999). “Cooperative principles and linguistic obstacles in advanced mathematics learning”. In: *Mathematics Education I. II*, p. 24.

Frege, Gottlob (1892). “Über sinn und bedeutung”. In: *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 100.1, pp. 25–50.

Galilei, Galileo (1623). *Il Saggiatore*.

Gigerenzer, Gerd et al. (2016). *Cognitive Unconscious and Human Rationality.* MIT Press.
Girard, Jean-Yves (1987). “Linear logic”. In: *Theoretical computer science* 50.1, pp. 1–101.
Gödel, Kurt (1989). *Collected works, Volume II.* URL: `https://monoskop.org/images/b/b7/Kurt_Godel_Collected_Works_Volume_II_1989.pdf`.
Gordon, Peter (2004). “Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia”. In: *Science* 306.5695, pp. 496–499.
Grice, Herbert Paul (1967). “Logic and Conversation”. In: *Studies in the Way of Words.* A cura di Paul Grice. Harvard University Press, pp. 41–58.
Hadamard, Jacques (1954). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field.* Courier Corporation.
Hall, Alfred Rupert (2002). *Philosophers at war: the quarrel between Newton and Leibniz.* Cambridge University Press.
Hamilton, William Rowan (1865). *Letter from Sir W. R. Hamilton to Rev. Archibald H. Hamilton.* URL: `https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Letters/BroomeBridge.html`.
Hannula, Markku S (2002). “Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values”. In: *Educational studies in Mathematics* 49.1, pp. 25–46.
Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician’s Apology.* Edizione 2004. Cambridge: Cambridge University Press. ISBN: 978-0-521-42706-7.
Hersh, Reuben (1993). “Proving is convincing and explaining”. In: *Educational Studies in Mathematics* 24.4, pp. 389–399.
— (1997a). “Math lingo vs. plain English: Double entendre”. In: *The American mathematical monthly* 104.1, pp. 48–51.
— (1997b). *What is Mathematics, Really?* Oxford University Press. ISBN: 978-0195113686.
Hilbert, David (1930). *Naturerkennen und Logic.* URL: `http://math.sfsu.edu/smith/Documents/HilbertRadio/HilbertRadio.mp3`.
— (1967). “On the Infinite”. In: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931.* A cura di Jean van Heijenoort. Cambridge MA: Harvard University Press.
— (1998). “Problems of the Grounding of Mathematics”. In: *From Brouwer To Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s.* A cura di Paolo Mancosu.
Hofstadter, D.R. (1999). *Gödel, Escher, Bach. Anniversary Edition: An Eternal Golden Braid.* Basic Books. Basic Books. ISBN: 9780465026562.
Hull, Ted H, Balka, Don S e Miles, Ruth Harbin (2013). “Mathematical Rigor in the Common Core.” In: *Principal Leadership* 14.2, pp. 50–55.
Jamison, Robert E (2000). “Learning the language of mathematics”. In: *Language and Learning across the Disciplines* 4.1, pp. 45–54.
Kelly, Jerry S (1988). “Arrow’s impossibility theorem”. In: *Social Choice Theory.* Springer, pp. 80–87.
Kitcher, Philip (1981). “Mathematical Rigor–Who needs it?” In: *Noûs* 15.4, pp. 469–493. ISSN: 00294624, 14680068. URL: `http://www.jstor.org/stable/2214848`.

Kleiner, Israel (1991). “Rigor and proof in mathematics: A historical perspective”. In: *Mathematics Magazine* 64.5, pp. 291–314.
Knuth, Donald E. (1974). *How two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness*. Illustrated by Jill C. Knuth. Addison-Wesley, p. 119. ISBN: 0-201-03812-9.
Krantz, Steven G. (2007). “The History and Concept of Mathematical Proof”. URL: `https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2010x-katz-cauchydirac.pdf`.
Kutrovátz, Gábor (2002). “Philosophical Origins in Mathematics? Árpád Szabó Revisited”. In: *13th Novembertagung on the History of Mathematics, Frankfurt, Germany*.
Lakatos, Imre (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. A cura di John Worrall e Elie Zahar. Cambridge University Press, p. 174.
Larson, Loren C. (1985). “A Discrete Look at $1 + 2 + \ldots + n$”. In: *The College Mathematics Journal* 16.5, pp. 369–382.
Lemaire, Jean (2006). “Cooperative game theory”. In: *Encyclopedia of Actuarial Science* 1.
Linnebo, Øystein (2006). “Epistemological challenges to mathematical platonism”. In: *Philosophical Studies* 129.3, pp. 545–574.
Lockhart, Paul (2009). “A mathematician’s lament: How school cheats us out of our most fascinating and imaginative art form”. In: *New York, NY: Bellevue Literary Review*.
Lynch, Peter (2016). *That’s Maths: The Mathematical Magic in Everyday Life*. Gill Books.
Maracchia, Silvio (ott. 2013). “The importance of symbolism in the development of algebra”. In: *Lettera Matematica* 1.3, pp. 137–144. ISSN: 2281-5937. URL: `https://doi.org/10.1007/s40329-013-0024-y`.
Mazur, Barry (2014). “Is it Plausible?” In: *The Mathematical Intelligencer* 36.1, pp. 24–33.
Mercier, Hugo e Sperber, Dan (2011). “Why do humans reason? Arguments for an argumentative theory”. In: *Behavioral and Brain Sciences* 34.2, pp. 57–74.
Morreau, Michael (2016). “Arrow’s Theorem”. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. A cura di Edward N. Zalta. Winter 2016. Metaphysics Research Lab, Stanford University. URL: `https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/arrows-theorem/`.
Nagel, Ernest e Newman, James R (2012). *Godel’s proof*. Routledge.
Narens, Louis (1973). “Freudenthal Hans. Lincos. Design of a language for cosmic intercourse. Part I. Studies in logic and the foundations of mathematics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1960, 224 pp”. In:
Nelson, Edward (2011). “Warning Signs of a Possible Collapse of Contemporary Mathematics”. In: *Infinity: New Research Frontiers*. A cura di Michal Heller e W. H. Woodin. URL: `https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/warn.pdf`.
Newton, Isaac (1732). *Arithmetica Universalis sive de compositione et resolutione arithmetica Liber*. Lugduni Batavorum (Leida), Veerbeck.
— (1833). *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Vol. 1. G. Brookman.

Norenzayan, Ara et al. (2002). "Cultural preferences for formal versus intuitive reasoning". In: *Cognitive science* 26.5, pp. 653–684.
OECD (2016). "Is memorisation a good strategy for learning mathematics?" In: 61. URL: https://www.oecd-ilibrary.org/content/paper/5jm29kw38mlq-en.
Poincaré, Henri (1905). "Intuition and Logic in Mathematics". In: *La valeur de la science*. URL: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Poincare_Intuition.html.
— (1910). "Mathematical Creation". In: *The Monist* 3.20, pp. 321–335.
Polya, George (1954a). *Mathematics and Plausible Reasoning Volume I: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press.
— (1954b). *Mathematics and Plausible Reasoning Volume II: Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press.
Powell, Arthur B e Frankenstein, Marilyn (1997). *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in mathematics education*. State University of New York Press Albany, NY.
Powell, Sarah R (2012). "Equations and the equal sign in elementary mathematics textbooks". In: *The Elementary school journal* 112.4, pp. 627–648.
Prodi, Giovanni (1975). "Matematica come scoperta". In: *Vol. I (e guida per insegnante)*.
Renardy, Michael e Rogers, Robert C. (2004). *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, p. 434. ISBN: 78-0-387-00444-0.
Rigatelli, Laura Toti (2012). *Evariste Galois 1811–1832*. Vol. 11. Birkhäuser.
Robinson, Alan J. A. e Voronkov, Andrei (2001). *Handbook of automated reasoning*. Vol. 1. Elsevier.
Rogers, Leo (2008). "Proof: a brief historical survey". URL: https://nrich.maths.org/5996.
Rondoni, Davide (2016). *Contro la letteratura. Un'accusa e una proposta*. Bompiani.
Rota, Gian-Carlo (1997). "The phenomenology of mathematical proof". In: *Indiscrete Thoughts*. Springer, pp. 134–150.
Rothman, Tony (1982). "Genius and Biographers: The Fictionalization of Evariste Galois". In: *The American Mathematical Monthly* 89.2, pp. 84–106. URL: https://doi.org/10.1080/00029890.1982.11995389.
Russo, Lucio (2000). *Segmenti e bastoncini. Dove sta andando la scuola?* Feltrinelli Editore.
Sazonov, Vladimir Yu. (1995). "On feasible numbers". In: *Logic and Computational Complexity*. A cura di Daniel Leivant. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 30–51. ISBN: 978-3-540-44720-7.
Schechter, Eric (2005). *Classical and Nonclassical Logics: An Introduction to the Mathematics of Propositions*. Princeton University Press.
Sfard, Anna (1991). "On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin". In: *Educational Studies in Mathematics* 22.1, pp. 1–36.
— (1994). "Reification as the Birth of Metaphor". In: *For the Learning of Mathematics*. Vol. 14. 1. FLM Publishing Association, pp. 44–55. URL: www.jstor.org/stable/40248103.

Shapley, Lloyd S., Roth, Alvin E. et al. (1988). *The Shapley value: essays in honor of Lloyd S. Shapley*. Cambridge University Press.

Slemrod, M. (gen. 1991). "Dynamics of measured valued solutions to a backward-forward heat equation". In: *Journal of Dynamics and Differential Equations* 3.1, pp. 1–28. ISSN: 1572-9222. URL: `https://doi.org/10.1007/BF01049487`.

Smith, James T. (2014). *David Hilbert's Radio Address – English Translation*. URL: `https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/david-hilberts-radio-address-english-translation`.

Stein, Edward (1996). *Without good reason: The rationality debate in philosophy and cognitive science*. Clarendon Press.

Suijs, Jeroen (2000). "Cooperative game theory". In: *Cooperative Decision-Making Under Risk*. Springer, pp. 7–41.

Tall, David e Vinner, Shlomo (1981). "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity". In: *Educational Studies in Mathematics* 12.2, pp. 151–169.

Troelstra, Anne Sjerp e Van Dalen, Dirk (2014). *Constructivism in mathematics*. Vol. 2. Elsevier.

Van Dalen, Dirk (2004). *Logic and structure*. Springer.

Vinner, Shlomo e Hershkowitz, Rina (1980). "Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts". In: *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematical Education, Berkeley*, pp. 177–184.

Vithal, Renuka e Skovsmose, Ole (1997). "The end of innocence: a critique of ethnomathematics". In: *Educational Studies in Mathematics* 34.2, pp. 131–157.

Waller, Patrice Parker e Flood, Chena T. (2016). "Mathematics as a universal language: transcending cultural lines". In: *Journal for Multicultural Education* 10.3, pp. 294–306. URL: `https://doi.org/10.1108/JME-01-2016-0004`.

Williams, Richard H e Mazzagatti, Roy D (1986). "Mathematical Firsts—Who Done It?" In: *The Mathematics Teacher* 79.5, pp. 387–391.

Zan, Rosetta (2007). *Difficoltà in matematica*. Springer.

# Sitografia

Astala, Kari et al. (2006). *The PISA survey tells only a partial truth of Finnish children's mathematical skills*. URL: `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2005/erik/PisaEng.html`.

Blum, Norbert (2017a). *A Solution of the P versus NP Problem*. Abstract su Arxiv. URL: `https://arxiv.org/abs/1708.03486`.

Brown, James Robert (nov. 2018). *Proofs and Guarantees*. URL: `https://www.scientificamerican.com/article/proofs-and-guarantees/`.

Cabezón, Eduardo Sáenz de (2014). *Math is forever*. Seminario TEDx. URL: `https://www.ted.com/talks/eduardo_saenz_de_cabezon_math_is_forever/transcript?language=en`.

Carlson, Jessica (2016). *What Is Math Rigor? It May Not Mean What You Think It Means*. A cura di Heera Kang. URL: https://www.mindresearch.org/math-rigor-e-book.

Clay Mathematics Institute (2018). *P vs NP problem*. URL: http://www.claymath.org/millennium-problems/p-vs-np-problem.

Fontana, Niccolò detto Tartaglia (1534). *Quando che 'l cubo con le cose appresso*. URL: https://it.wikisource.org/wiki/Quando_chel_cubo_con_le_cose_appresso.

Haran, Brady (2011-2018). *Numberphile*. URL: https://www.numberphile.com/.

Israel, Giorgio (apr. 2011). URL: https://www.ilfoglio.it/articoli/2011/04/23/news/vade-retro-test-65616/.

Louisiana Department of Education (2017). *A Guide to Rigor in Mathematics 2.0*. URL: https://www.louisianabelieves.com/docs/default-source/year-long-planning/k-12-lssm-alignment-to-rigor.pdf.

Lynch, Peter (2013-2018). *That's Maths*. URL: https://thatsmaths.com/.

Munroe, Randall (2005-2018). URL: https://what-if.xkcd.com/.

Orlin, Ben (gen. 2018). *The Reluctant Gatekeeper*. URL: https://mathwithbaddrawings.com/2018/01/24/the-reluctant-gatekeeper/.

Palisoc, Randy (2014). *Math isn't hard, it's a language*. Seminario TEDx. URL: https://www.youtube.com/watch?v=V6yixyiJcos.

Rosewater, Mark (2018). *What is a game?* URL: https://magic.wizards.com/en/articles/archive/making-magic/what-game-2018-06-04.

Sfard, Anna (2016). *Tenere a mente il parlare, parlando della mente*. Trascrizione dell'intervento al XXXIII Convegno UMI–CIIM 2016, traduzione di Anna Baccaglini-Frank e Fabio Brunelli. URL: http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/focus/anna-sfard/.

Sloane, Neil (nov. 2018). *Primes on the Moon (Lunar Arithmetic)*. URL: https://www.youtube.com/watch?v=cZkGeR9CWbk.

Tao, Terence (2009). *There's more to mathematics than rigour and proofs*. URL: https://terrytao.wordpress.com/career-advice/theres-more-to-mathematics-than-rigour-and-proofs/.

Tokieda, Tadashi (2016-2018). *Tadashi's toys*. URL: http://www.msri.org/web/msri/public/tadashis-toys.

Villani, Cédric (2016). *What's so sexy about math?* Seminario TED. URL: https://www.youtube.com/watch?v=Kc0Kthyo0hU.

Ultimo accesso ai siti in bibliografia e sitografia: 25 novembre 2018.